كُنْ مُجِدْ
https://cnmujed.com

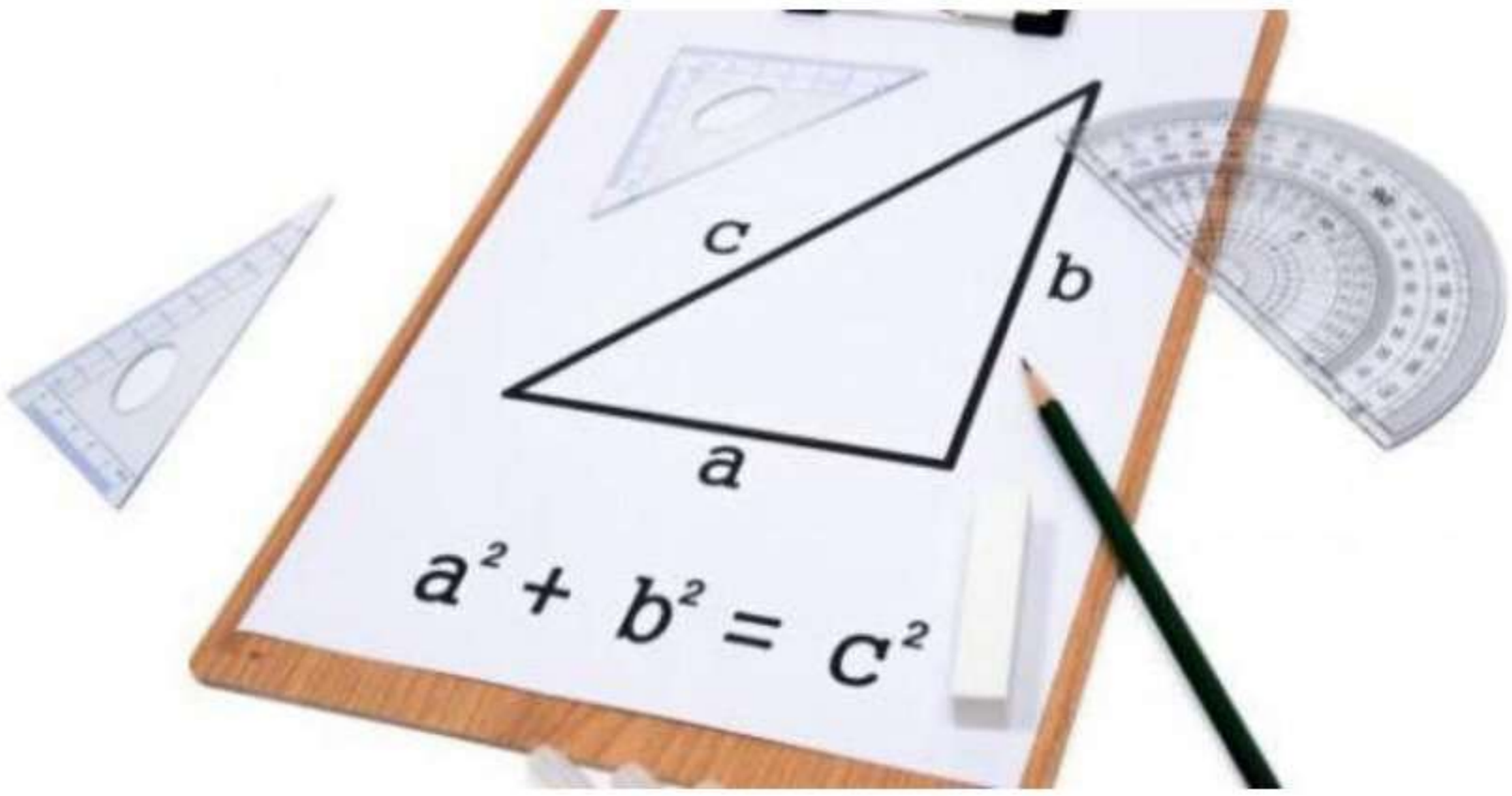
نظام حديث

الجبر وحساب المثلثات

للصف الأول الثانوي

إعداد

أ / محمد عبد الرحيم



مذكرة الشرح

الفصل الدراسى الأول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن فجد
https://enmajed.com

المادة: ...جبر...ا.ث..... الدرس: ... معادلة الدرجة الثانية

الدرس الأول
معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

متطلبات قبلية
الصورة العامة:-

$أ س^{2} + ب س + جـ = 0$

أ معامل $س^{2}$	شرط
ب معامل س	$أ \neq 0$
جـ الحد المطلق	لتظل من الدرجة الثانية

حل المعادلة (جذور المعادلة)

لها حلان أو جذران وهي قيم س التي تحقق المعادلة.

حل المعادلة
- التحليل
- القانون العام

القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - 4أجـ}}{2أ}$$

يحل حل المعادلة بيانيا بوضعها على صورة الدالة $د(س) = أ س^{2} + ب س + جـ$

ورسم منحنى الدالة التربيعية

يوجد حلان	يوجد حل مضاعف	لا يوجد حل
$\{ل، م\}$	$\{ل\}$	ϕ
مح	مح	مح

المثال

أوجد جبريا مح مجموعة حل المعادلات

① $س^{2} + 3س = 0$

بالتحليل $س(س+3) = 0$

$س = 0$ أو $س + 3 = 0 \Leftarrow س = -3$

$\therefore$ مح $= \{0، -3\}$

② $س^{2} + 9 = 0$

$س^{2} = -9$ $س = \pm\sqrt{-9} \notin$

ليس لها حل في ح

$\therefore$ مح $= \phi$

كن مجد
https://enmjed.com

③ $س^2 + 3س + 5 = 0$

الحل

يتضح من المعادلة أن القانون العام

$أ = 1$ $ب = 3$ $جـ = 5$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (4 \times 1 \times 5)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$\notin ح$

ليس لها حل في ح

$\therefore$ مجموعة الحل $= \phi$

---

② $2س^2 + 3س - 4 = 0$

الحل

$أ = 2$ $ب = 3$ $جـ = -4$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (4 \times 2 \times -4)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$س = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \approx 1,85$$

أو $س = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4} \approx -2,35$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{1,85 ، -2,35\}$

يمكن الحل باستخدام الحاسبة العلمية مباشرة

للتأكد من الحل

مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

اختر الاجابة الصحيحة :-

① اذا كان محور الدالة التربيعية يقطع محور السينات في $(2، 0)$ ، $(-3، 0)$ فإن مجموعة حل المعادلة $د(س) = 0$ هي

أ $\{2، 2\}$ ب $\{-3، 0\}$

ج $\{2، -3\}$ د $\{(2، 0)، (-3، 0)\}$

---

② اذا كان $س = 3$ أحد جذري المعادلة $س^2 + م س = 3$ فإن $م =$ ---

أ $[-2، 2، 4، 6]$

الحل

$س = 3$ يحقق المعادلة

$(3)^2 + م(3) = 3$

$9 + 3م = 3 \Leftarrow 3م = 3 - 9 = -6$

$م = \frac{-6}{3} = -2$

---

③ $د(س) = س^2 + ب س + جـ$ وكان $س = 2$ أحد جذري المعادلة $د(س) = 0$

فإن $د(0) =$ ---

أ $[2، -2، 4، 0]$ صفر

$\therefore س = 2$ يحقق المعادلة

$د(2) = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن مجد
https://enmujed.com

المادة: جبر ... الدرس: ... متطلبات قبلية .....

④ الشرط الذى يجعل المعادله
$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ تربيعيه هو ـ

$أ > ٠$ $أ < ٠$

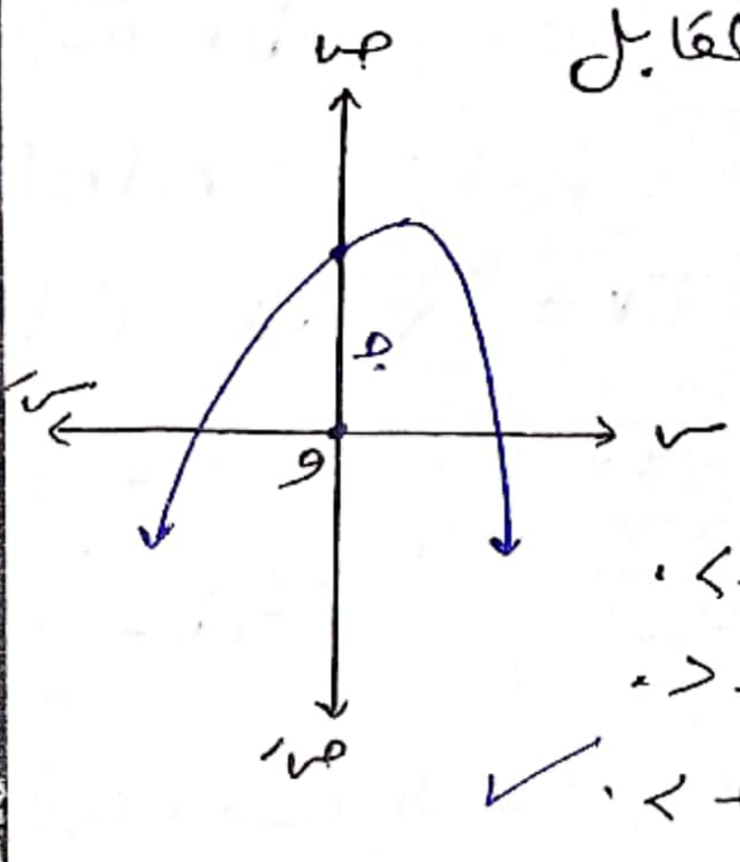
$أ \neq ٠$ $ب \neq ٠$

$أ \neq ٠$

لانه معامل $س^{٢}$

---

⑤ من الشكل المقابل
يمثل $ص =$
$أ س^{٢} + ب س + جـ$
ايهما صحيح



① $أ > ٠ ، ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠$

② $أ > ٠ ، ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠$

③ $أ < ٠ ، ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠$ ✓

④ $أ < ٠ ، ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠$

المنحنى لاسفل $أ < ٠$

الجزء المقطوع من محور ص موجب $جـ > ٠$

---

⑥ اذا كان ل جذر أحد جذرى المعادله
$س^{٢} + ٣ س - ٥ = ٠$ فإن قيمة المقدار

$ل^{٢} + ٣ ل + ٤ =$ ـــــــ

[صفر ، ٢ ، ⑨ ، ٥]

الحل

∵ ل تحقق المعادله

∴ $ل^{٢} + ٣ ل - ٥ = ٠$

القدار المطلوب $= ل^{٢} + ٣ ل + ٤$

$= ل^{٢} + ٣ ل - ٥ + ٤ + ٥$

$= ٠ + ٩ =$ صفر $+ ٩ = ٩$

---

⑦ اذا كانت $س = ٢$ احد جذرى
المعادله $ل أ س^{٢} - ل س = ٠$ فإن

ل = ـــــ

أ) $\{١ ، -١\}$ ب) $\{٠\}$

ج) $\{٦\}$

د) $\{\frac{١}{٢}\}$

الحل

$س = ٢$ تحقق $٤ ل^{٢} - ٢ ل = ٠$

$٢ ل^{٢} - ل = ٠$ $ل (٢ ل - ١) = ٠$

$ل = ٠$	$٢ ل - ١ = ٠$
مرفوض	$٢ ل = ١$
	$ل = \frac{١}{٢}$

مجموع الاعداد الصحيحه $(١ + ٢ + ٣ + ... + ن)$
يساوى $ن = \frac{ن}{٢} (١ + ن)$ فكم عدد صحيحا بدءا
من ١ يكون مجموعها $= ٧٨$

الحل

$٧٨ = \frac{ن}{٢} (١ + ن)$ (×٢)

$١٥٦ = ن (١ + ن) = ن + ن^{٢}$

$ن + ن^{٢} - ١٥٦ = ٠$

$(ن + ١٣)(ن - ١٢) = ٠$

$ن = -١٣$	$ن = ١٢$
مرفوضه	

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كُن مُجِدّ
https://enmujad.com

المادة : جبر ١ ث ..... الدرس : ..... الأعداد المركبة .....

الدرس الأول
مقدمة في الأعداد المركبة

نعلم أنه للمعادلة

$س^2 + 1 = 0$ ليس لها حل في ح

لذلك تم فرض عدد تخيلي ت

بحل المعادلة بحيث $ت = \sqrt{-1}$

$\boxed{ت^2 = -1}$ بحيث $ت \notin ح$

ت عدد غير حقيقي

وبكون حل المعادلة $س^2 + 1 = 0$

$س^2 = -1$ $\quad س = \pm\sqrt{-1}$

$\therefore س = \pm ت$

مجـ = { ت ، - ت }

وبهذا نجد أن

$\sqrt{-2} = \sqrt{2 \times -1} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$

$= \sqrt{2}\ ت$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times -1} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1}$

$= 2\ ت$

وبالمثل

$\boxed{\sqrt{-9} = \sqrt{9}\ ت}$

حل المعادلة $س^2 + 5 = 0$

الحل

$س = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\ ت$

$س = \{ \sqrt{5}\ ت ، -\sqrt{5}\ ت \}$

ملاحظة هامة

$\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} = -\sqrt{9 \times 4}$

أي أن

$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{2}\ ت \times \sqrt{3}\ ت$

$= \sqrt{6}\ ت^2 = \sqrt{6} \times -1$

$= -\sqrt{6}$

قوى ت الصحيحة

$ت = \sqrt{-1}$

$ت^2 = -1$

$ت^3 = ت^2 \times ت = -ت$

$ت^4 = ت^2 \times ت^2 = 1$

وهكذا نجد أنه لإيجاد $ت^{ن}$ فإنه

إذا كان الأس يقبل القسمة على 4 سواء موجب أو سالب يكون الناتج = 1

إذا كان الأس موجباً فنطرح منه أول عدد كمية يقبل القسمة ÷ 4

إذا كان الأس سالباً نضيف له أول عدد موجب يقبل القسمة ÷ 4

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أوجد في أبسط صورة :-

$ت^{16} = 1$

$ت^{-8} = 1$

$ت^{25} = ت^{25-24} = ت$

$ت^{43} = ت^{43-40} = ت^{3} = -ت$

$ت^{-30} = ت^{-30+32} = ت^{2} = -1$

$ت^{-107} = ت^{-107+104} = ت^{3} = -ت$

$\frac{1}{ت^{15}} = ت^{-15} = ت^{-15+17} = ت^{2}$

$\sqrt{-7} \times \sqrt{-18} = -\sqrt{7 \times 18}$

$= -\sqrt{126} = -\sqrt{9 \times 14}$

$= -3\sqrt{14}$

$-4ت \times -6ت = 24ت^{2}$

$= -24$

نستنتج أن الأعداد

$س^{2} + ص^{2} - 6س - 5$

$\frac{1}{2}$ ت

تسمى أعداد تخيلية $\neq ح$

بينما العامل ت عدد حقيقي

العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة

$أ + ب ت$ حيث أ، ب أعداد حقيقية

، $ت^{2} = -1$ ويرمز له بـ ع

$ع = أ + ب ت$

جزء حقيقي — جزء تخيلي

أمثلة

$2 + 3ت$ ، $5ت - 4$ ، -1

لاحظ

$ع = 3$ عدد حقيقي وهو أيضا عدد مركب جزؤه التخيلي = 0

$ع = 2ت$ عدد تخيلي وهو أيضا عدد مركب جزؤه الحقيقي = 0

أي أن مجموعة الأعداد المركبة ك هي

$ك = \{ أ + ب ت : أ، ب \in ح ، ت^{2} = -1 \}$

أوجد في ك مجموعة حل المعادلات الآتية

① $س^{2} - 4س + 5 = 0$

الحل

$أ = 1$ ، $ب = -4$ ، $ج = 5$

كن مجد
https://enmujed.com

$س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - (٥ \times ١ \times ٤)}}{١ \times ٢}$

$س = \frac{٤ \pm \sqrt{٢٠ - ١٦}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

$س = \frac{٤ + ٢ت}{٢}$ | $س = \frac{٤ - ٢ت}{٢}$

$= ٢ + ت$ | $٢ - ت$

$م.ح = \{ ٢ \pm ت \}$

تساوي عددين مركبين

إذا كانا

$أ + ب ت = ﺟ + د ت$

فإنه $\boxed{أ = ﺟ}$ ، $\boxed{ب = د}$

الحقيقي = الحقيقي ، التخيلي = التخيلي

أمثلة :-

أوجد قيمتي س ، ص حيث

$س + ت ص = ٣ + ٤ت$

الحل

$س = ٣$ ، $ص = ٤$

$(٣س - ٢) + (٣ص + ١)ت = ٧ + ١٠ت$

الحل

$٣س - ٢ = ٧$ | $٣ص + ١ = ١٠$

$٣س = ٩$ | $٣ص = ٩$

$س = \frac{١٨}{٦} = \boxed{٥}$ | $ص = \frac{٩}{٣} = \boxed{٣}$

العمليات على الأعداد المركبة

① الجمع والطرح

$(٣ + ٢ت) + (٢ - ٥ت)$

الحل

$= ٥ - ٣ت$

$(١ - ٣ت) - (٥ - ت)$

الحل

$= ١ - ٣ت - ٥ + ت$

$= -٤ - ٢ت$

---

② الضرب

$(٢ + ٣ت)(٥ - ٤ت)$

١٢

$= -١٠ - ٨ت + ١٥ت - ١٢ت^{٢}$

$= -١٠ - ٨ت + ١٥ت + ١٢$

$= ٢٢ + ٧ت$

فك القوس

$(٢ - ٥ت)^{٢}$

-٢٥

$= ٤ - ٢٠ت + ٢٥ت^{٢}$

$= -٢١ - ٢٠ت$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن مجد
https://enmjed.com

المادة : جبر ..... الدرس : ..... ذات الحدين ..... المركبة

ملاحظة

$(1 \pm ت)^{ن} = (\pm 2ت)^{ن}$

$(1+ت)^{10}$

الكل

$= ((1+ت)^{2})^{5} = (1+2ت+ت^{2})^{5}$

$= (2ت)^{5} = 32ت^{5} = 32ت^{5-4}$

$= 32ت$

$(1+ت)^{20-2} = (2ت)^{10.10}$

$= 2 \times ت^{10.10}$

$= 2 \times ت^{10.10} = 2 \times ت^{10.10-10.8}$

$= -2$

$(1+2ت^{-2})(2+3ت^{5}+4ت^{6})$

الكل

$= -1 (2+3ت^{5-4}+4ت^{6-4})$

$= -1 \times (2+3ت+4ت^{2})$

$= -1 \times (-2+3ت)$

$= \boxed{2-3ت}$

الحدانية المرافقان

$أ+ب ت$ ، $أ-ب ت$

يختلفان في إشارة الجزء التخيلي فقط

العدد	مرافقه
$2+3ت$	$2-3ت$
$5-ت$	$5+ت$
$ت+4$	$-ت+4$
$3ت$	$-3ت$
7	7

مجموعهما وحاصل ضربهما عدد حقيقي

أجدنا ع

$ع = (2+3ت) + (2-3ت)$

$(2+3ت)(2-3ت)$

$= 4 - 3ت^{2} = 4+3 = 7$

للاختصار

$(أ+ب ت)(أ-ب ت) = أ^{2}+ب^{2}$

③ القسمة

$\frac{3+4ت}{5-2ت}$ بالضرب في مرافق المقام بسطا ومقاما

$= \frac{3+4ت}{5-2ت} \times \frac{5+2ت}{5+2ت}$

$= \frac{15+6ت+20ت+8ت^{2}}{25+4}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\frac{٧ + ٦ ت^{ث}}{٢٩} = \frac{٧}{٢٩} + \frac{٦}{٢٩} ت$$

اختر الاجابة الصحيحة

① مرافق العدد $(٣ت - ٤)$ هو

الاجابة $-٣ت - ٤$

تعبير الجزء التخيلي فقط

---

② المعكوس الجمعي للعدد $٤ - ٧ت$

هو $-٤ + ٧ت$

معكوس جمعي للعدد $ع$ هو $-ع$

---

③ $١٢ + ٣٢ت = ٨٤ - ٢٧ت$

فإن $٩ + ٨ن =$ ـــــــ

الحل

$٤ن = ١٢$	$-٢٧ = ٣م$
$ن = ٣$	$م = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$

$٩ + ٨ن = ٣ + (-٩) = -٦$

---

④ $(١ + ت^{٤})(١ - ت^{٧}) = س + ص ت$

فإن $س + ص =$ ـــــــ

الحل

$(١ + ١)(١ - ت^{٧-٤}) = س + ص ت$

$٢(١ - ت^{٣}) = س + ص ت$

$٢(١ + ت) = ٢ + ٢ت$

$س + ص = ٢ + ٢ = \boxed{٤}$

لـ $م$ جذر المعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$

فإن $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨} =$ ـــــــ -٢

الحل

جذر المعادلة $ت^{٢} = -١$

$ت^{٢٠١٨} + (-ت)^{٢٠١٨} = ٢(ت^{٢})^{٢٠١٨}$

$= ٢ ت^{٢} = -٢$

$(\frac{١ - ت}{١ + ت})^{١٠٠} = س + ت ص$ فإن $(س ، ص) =$ ـــــــ $(٠ ، ١)$

$\frac{(١ - ت)^{١٠٠}}{(١ + ت)^{١٠٠}} = \frac{(-٢ت)^{١٠٠}}{(٢ت)^{١٠٠}} = ١$

$س = ١ ، ص = ٠$

مرافق العدد $(٢ + ت)^{-١}$ هو ـــــــ

$= \frac{١}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٢ - ت}{٤ + ١}$

$= \frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥} ت$

مرافقه $= \frac{٢ + ت}{٥}$

اصغر أس صحيح $ن$ يجعل المقدار

$(\frac{١ + ت}{١ - ت})^{ن} = ١$ هو ـــــــ ٢

كن مجد
https://enmujed.com

المادة: جبر و ا ث ..... الدرس: الأعداد المركبة

ت + ت^٢ + ت^٣ + ... + ت^١٠٠

= ـ صفر ـ

اكل

ت + (-١) + (-ت) + ١ + ـ ـ ـ ـ

يتكرر المقدار ٢٥ مرة

= ٢٥ (ت + (-١) + (-ت) + ١)

= ٢٥ × صفر = صفر

اذا كانت ت^٢ = ت^ن فإي مما يلي صحيح :-

① م = ن ✗ (ليس بالضرورة)

② (م + ن) عدد زوجي ✓

③ (ن - م) مضاعف للعدد ٤ ✓

اكل

① و ② فقط

أي من الآتي صحيح

٢ + ٣ت < ٢ + ٤ت

٣ - ٤ت < ٢ - ٣ت

١ + ت > ١ - ت

لا يمكن مقارنة العدد (ت)

لانه لا يوجد ترتيب للأعداد المركبة

ك .

الدرس الثاني

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

س = (-ب ± √(ب^٢ - ٤ أ جـ)) / ٢ أ

المميز = ب^٢ - ٤ أ جـ

موجب > ٠	صفر	سالب < ٠
الجذران	الجذران	الجذران
حقيقيان	حقيقيان	مركبان
مختلفان	متساويان	غير حقيقيان

حدد نوع جذري المعادلات الآتية

① س^٢ - ١١ س + ١٠ = ٠

اكل

المميز = ب^٢ - ٤ أ جـ

= ١٢١ - (١٠ × ١ × ٤)

= ٨١ > ٠

الجذران حقيقيان مختلفان

للتأكد (س - ١٠)(س - ١) = ٠

الجذران ١٠ ، ١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن فجد
https://enmujed.com

② $س^2 - ١٠س + ٢٥ = ٠$

الحل

المميز $= ب^2 - ٤أجـ$

$= ١٠٠ - (٤ \times ١ \times ٢٥)$

$= ١٠٠ - ١٠٠ =$ صفر

الجذر له صيغة مقدار واحد

للتأكد $(س - ٥)(س - ٥) = ٠$

الجذر له متساويان

---

③ $س^2 - ٢س + ٥ = ٠$

الحل

المميز $= ب^2 - ٤أجـ$

$= ٤ - (٤ \times ١ \times ٥)$

$= ٤ - ٢٠ = -١٦ < ٠$

الجذر له مركبان غير صيغة

للتأكد

$س = \frac{+٢ \pm \sqrt{-١٦}}{٢} = \frac{+٢ \pm ٤ت}{٢}$

الجذر له $١ \pm ٢ت$

$(س - ١١) - س(س - ٦) = ٠$

الحل

$س - ١١ - س^2 + ٦س =$ (١-ك)

$س^2 - ٧س + ١١ = ٠$

المميز $= ٤٩ - ٤ \times ١ \times ١١ = -٤ < ٠$

صيغة مختلفة.

إذا كان جذري المعادلة التربيعية حقيقيان متساويان أحدهما لـ ك من كل حالة -

① $١٨س^2 - لـس + ٨ = ٠$

الحل

الجذر له حقيقان متساويان ∴ المميز $= ٠$

$ب^2 - ٤أجـ = ٠$

$لـ^2 - (٤ \times ١٨ \times ٨) = ٠$

$لـ^2 = ٥٧٦$

$لـ = \pm\sqrt{٥٧٦} = \boxed{\pm ٢٤}$

$س^2 + ٢(لـ - ١)س + (٢لـ + ١) = ٠$

الحل

$أ = ١$ $ب = ٢(لـ - ١)$ $جـ = ٢لـ + ١$

المميز $= ب^2 - ٤أجـ$

$= ٤(لـ - ١)^2 - (٤ \times ١ \times (٢لـ + ١)) = ٠$

$= ٤لـ^2 - ٨لـ + ٤ - ٨لـ - ٤ = ٠$

$٤لـ^2 - ١٦لـ = ٠$ ÷٤

$لـ^2 - ٤لـ = ٠$

$\boxed{لـ = ٠}$ $\boxed{لـ = ٤}$

$س^2 - ٢س + ١ = ٠$ $س^2 + ٦س + ٩ = ٠$

$(س - ١)(س - ١) = ٠$ $(س + ٣)(س + ٣) = ٠$

الجذر له ١ ، ١ الجذر له -٣ ، -٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن مجد
https://enmujed.com

المادة : جبر ١ ث ..... الدرس : .... نوعي جذري المعادلة

أوجد مميزه ك التي تجعل جذري المعادله
$س^2 + 4س + ك = 0$ حقيقيه
مختلفين
الحل
الجذرين حقيقيان مختلفان لما ك،
$ب^2 - 4أ جـ > 0$
$16 - 4 \times 1 \times ك > 0$
$16 - 4ك > 0$
$-4ك > -16$
$ك < \frac{-16}{-4} \Leftarrow ك < 4$
$ك \in]-\infty ، 4[$

أوجد ك التي تجعل جذري المعادله
$ك س^2 - 8س + 16 = 0$
مركبان غير حقيقيان
الحل
المميز < 0 $ب^2 - 4أ جـ < 0$
$64 - (4 \times ك \times 16) < 0$
$-64ك < -64$
$ك > \frac{-64}{-64}$ $ك > 1$
$ك \in]1 ، \infty[$

ملاحظه ①

اذا كانت $أ ، ب ، جـ$ أعداد نسبية للمعادله $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ وكان المميز مربعا كاملا فإن الجذرين يكونه أعداد نسبيه

مثال
اذا كان $ل ، م$ عددين نسبين فجد أن جذري المعادله
$ل س^2 + (ل - 2) س - م = 0$
عددان نسبيان
الحل
$ل ، ل - م ، -م \in ن$
المميز $= (ل - م)^2 - 4 ل \times -م$
$= ل^2 - 2ل م + م^2 + 4 ل م$
$= ل^2 + 2ل م + م^2$
$= (ل + م)^2$ مربع كامل
∴ الجذرين أعداد نسبية

ملاحظه (٢)
اذا كان مميز المعادله التربيعيه ذات المعاملات الحقيقيه غير موجب فإنه جذري المعادله يكونه مركبان ومترافقان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كُن مُجِدّ
https://enmujed.com

أكمل ما يأتي

① جذرا المعادله $س^2 - 2أ س + 1 = 0$ يكونان ـــــ

المميز $= (-2أ)^2 - (4 \times 1 \times 1)$

$= 4أ^2 - 4 = 16$ موجب مربع كامل

∴ الجذرين حقيقيين ومتنسبين

---

② $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ وكان $4أ + 2ب + جـ = 0$

$أ \neq 0$ ، $ب، جـ \in ح$ ، $أ \neq 0$

$(ب^2 - 4أجـ)$ غير موجب فإن جذري المعادله مرتبين ومترافقين

---

③ $أ، ب، جـ$ أعداداً صحيحه $أ + ب + جـ = 0$ ، $أ \neq جـ$ فإن جذري المعادله

$(ب + جـ - أ) س^2 + (جـ + أ - ب) س + (أ + ب - جـ) = 0$ يكونان ـــ

الحل

يمكن كتابة المعادله

$-4أجـ + ب^2 س^2 + (-جـ) س + (-جـ) = 0$

$أ س^2 + ب س + جـ = 0$

المميز $= ب^2 - 4أجـ = (-أ - جـ)^2 - 4أجـ$

$= أ^2 + 2أجـ + جـ^2 - 4أجـ = (أ - جـ)^2 > 0$

∴ الجذرين حقيقيان مختلفان نسبيان

④ اذا كان للمعادله $س^2 - 2أ س + جـ = 0$ جذرين مركبين مترافقين فإن $أ$ ـــ

الحل

الجذرين مركبين مترافقين

∴ المميز < 0 ، المعادله غير حقيقيه

$ب^2 - 4أجـ < 0$

$8 - 4أ < 0 \Leftarrow -4أ < -8$

$\frac{-8}{-4} < أ$ ، $أ > 2$

$أ \in]2، \infty[$

اذا كان جذري المعادله

$4س^2 - 2س + م = 0$ ينتميان للفترة $]-1، 1[$ فإن ـــــ

① $0 \geq م > 2$ ② $-6 < م \leq \frac{1}{8}$

③ $-2 > م > -6$ ④ $\frac{1}{4} \geq م > -2$

الحل

$\frac{|2 + م| - 4|1 - م|}{2 \times 4} < 1$

$|2 + م| - 4|1 - م| < 8 \Leftarrow |2 + م| - |4 - 4م| < 8$

$|م - 6| < 3م$

$3م > 0 \Leftarrow 3م > |م - 6| \geq 0$

$4 > م > -2 \Leftarrow 3م < م + 6 < 3م$

$\frac{1}{4} \geq م > -2 \Leftarrow \frac{3}{16} > م > -\frac{4}{16}$

كن مجد
https://enmujed.com

الدرس الثالث
العلاقة بين جذري المعادلة ومعاملات حدودها

$أ س^{٢} + ب س + ج = ٠$

جذريها هما ل ، م

مجموع الجذرين $= ل + م = \frac{-ب}{أ}$

حاصل ضربهما $= ل م = \frac{ج}{أ}$

$ل + م = \frac{\text{معامل } س}{\text{معامل } س^{٢}}$	$ل م = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}}$

ملاحظات هامة

① إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر $\Leftarrow ب = ٠$

② إذا كان أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر $\Leftarrow أ = ج$

③ إذا كان مجموع الجذرين = حاصل ضربهما $\Leftarrow ب = -ج$

المسائل

دون حل المعادلات أوجد مجموع ومحاصل ضرب جذريها :

$٤ س^{٣} + ٤ س - ٣٥ = ٠$

الحل

$ل + م = \frac{-٤}{٤} = -١$

$ل م = \frac{-٣٥}{٤}$

اختر الإجابة الصحيحة

① حاصل ضرب جذري المعادلة $٣ + ٢ س - \frac{١}{٤} س^{٢} = ٠$ يساوي

$[-\frac{٢}{٣} ، ١٢ ، -١٢ ، \frac{٣}{٤}]$

حاصل ضربهم $= ٣ \div \frac{-١}{٤} = -١٢$

---

② المعادلة $ب س^{٢} + ب - ج س + ج = ٠$

حاصل ضرب جذريها = ---

الحل

$ل م = \frac{ج}{ب}$

③ إذا كان أحد جذري المعادلة $أ س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠$ معكوسا ضربيا للآخر

فإن $أ =$ ---

الحل

$أ = ج = ٢$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اذا كان أحد جذري المعادلة الآتية

$س^2 - (ب-3)س + 5 = 0$

معكوسا جمعيا للآخر فأوجد $ب$ = ...

$\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، 2 ، [3]

$\therefore$ بالتعويض $س = 0 \Leftarrow ب - 3 = 0$

$ب = 3$

اذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة

$(ك-2)س^2 - 6س + 12 = 0$ هو 3

فإن $ك$ = ـــــ

[0 ، 4 ، [6] ، 8]

$\frac{ك}{أ} = 3 \Leftarrow \frac{12}{ك-2} = \frac{3}{1}$

$ك - 2 = \frac{1 \times 12}{3} = 4 \Leftarrow ك = 6$

اذا كانت $(1 + ت)$ أحد جذري

$س^2 - 2س + أ = 0$ فأوجد $أ$ = ...

حيث $أ \neq 0$.

الحل

$\therefore$ المعادلات تصيفيه وأحد الجذرين

مركب فيكون الآخر مرافقه

أي الجذر الآخر $1 - ت$

حاصل ضربهم $= (1-ت)(1+ت) = أ$

$\Leftarrow أ = 1 + 1 = [2]$

أوجد قيمتي $أ$ ، $ب$ اذا كان $1 -$

① -3 ، 7 جذري المعادلة

$أس^2 - بس - 21 = 0$

الحل

$-7-$

$(س + 3)(س - 7) = 0$

$س^2 - 4س - 21 = 0$

$أ س^2 - ب س - 21 = 0$

$\therefore أ = 1$ ، $ب = 4$

---

② $3 - ت$ ، $-3 - ت$ جذري المعادلة

$س^2 + أ س + ب = 0$

الحل

مجموع الجذرين $= -أ \Leftarrow أ = 0$

حاصل ضربهم $= -3 - ت^2 = 3 = ب$

[$أ = 0$] [$ب = 3$]

ملاحظات

اذا كان أحد الجذرين $ل$ وكان الثاني

ضعف الآخر $2ل$

ثلاثة أمثال الآخر $3ل$

نصف الآخر $\frac{ل}{2}$

معكوس جمعي للآخر $-ل$

معكوس ضربي للآخر $\frac{1}{ل}$

مربع الآخر $ل^2$

كن مجد
https://enmujad.com

أحد الشروط اللازمة لكى يكون أحد جذرى المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ ضعف الآخر .

الحل

الجذران $ل ، 2ل$

مجموعهم $= 3ل = -\frac{ب}{أ}$ $\Leftarrow$ $\boxed{ل = -\frac{ب}{3أ}}$

ضربهم $= 2ل^2 = \frac{جـ}{أ}$ بالتعويض عن ل

$2(-\frac{ب}{3أ})^2 = \frac{جـ}{أ}$

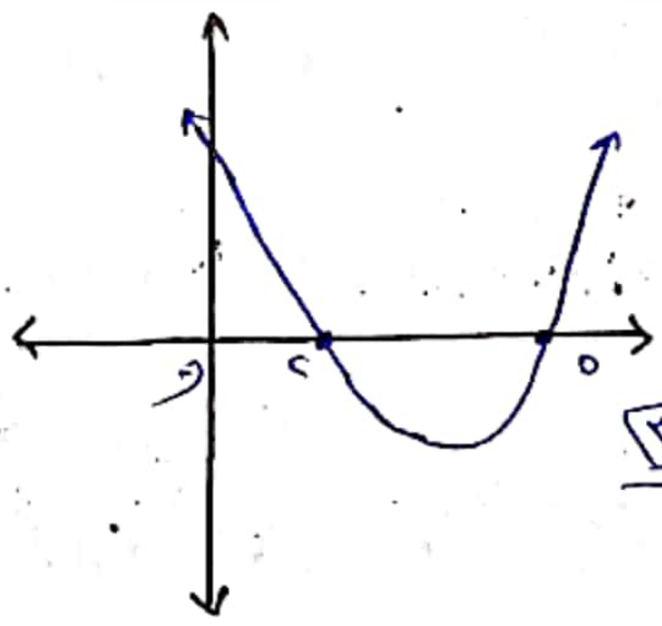
$\frac{2ب^2}{9أ^2} = \frac{جـ}{أ}$ $\Leftarrow$ $\frac{2ب^2}{9أ} \times \frac{أ}{1} = جـ$

الشرط اللازم $\boxed{2ب^2 = 9أ جـ}$

في الشكل المقابل

منحنى $د(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + هـ$

قيمة $\frac{ب + هـ}{أ} = \boxed{3}$



$= \frac{هـ}{أ} + \frac{ب}{أ}$

$= -$ مجموع الجذور + حاصل ضربهم

$= -(2 + 5) + (2 \times 5)$

$= -7 + 10 = \boxed{3}$

الدرس الرابع

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

اذا كان $ل ، 3ل$ جذرى المعادلة

$أ س^2 + ب س + جـ = 0$

بالقسمة على $أ \neq 0$ للطرفين

$س^2 + (\frac{ب}{أ}) س + \frac{جـ}{أ} = 0$

$س^2 -$ (مجموع الجذرين) $س +$ (حاصل ضربهم) $= 0$

تكون المعادلة التربيعية التى جذراها

① $-2 ، 4$

الحل

مجموعهم $= 4 - 2 = \boxed{2}$ ضربهم $= \boxed{-8}$

$س^2 - 2س - 8 = 0$

---

② $3\sqrt{5} ، -3\sqrt{5}$

الحل

مجموعهم $= 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 0$

ضربهم $= -10 \times 2 = -20$

المعادلة

$س^2 - 0 س - 20 = 0$

$س^2 - 20 = 0$

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ $س^3 - ٢س^2 + ٣س + ٦ = ٠$

الكل

جمعهم = ٦ ، ض٣ = ٩ + ٨ = ١٧

المعادله هى

$س^3 - ٦س + ١٧ = ٠$

اختر الاجابه الصحيحه

① اذا كان ل ، ل^2 هما جذرا المعادله

$٢س^2 + ب س + ٥٤ = ٠$ فإن ب = ...

[٣٦ ، ٢٧ ، ٢٤- ، ٧]

-١٢ ← الحل

ض٢ = $ل^2 = \frac{٥٤}{٢} = ٢٧$

$ل^2 = ٩$ ، ل = ٣

جمعهم = ٩ + ٣ = ١٢ ∴ ب = -١٢

---

② اذا كان م ، $\frac{م}{٣}$ هما جذرا المعادله

$م س^2 + ب س + ١٢ = ٠$ فإن م = ...

[٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩]

الحل

ض٢ = $م \times \frac{م}{٣} = ٢ = \frac{م}{١٢}$

∴ م = $\frac{٢}{١٢}$ = ٦

تكوين معادلة من معادلة أخرى معطاه

تذكر المتطابقات الآتيه

① $ل^2 + م^2 = (ل + م)^2 - ٢ل م$

② $ل^3 + م^3 = (ل + م)[(ل + م)^2 - ٣ل م]$

③ $(ل - م)^2 = (ل + م)^2 - ٤ل م$

④ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{(ل + م)^2 - ٢ل م}{ل م}$

المسائل

اذا كان ل ، م هما جذرا المعادله

$س^2 - ٥س + ٣ = ٠$ كون المعادله التى

جذراها

① ل - ٤ ، م - ٤

الكل

المعطاه ل ، م

ل + م = ٥

ل م = ٣

المطلوبه (ل - ٤ ، م - ٤)

جمعهم = م - ٤ + ل - ٤ = م + ل - ٨

= ٥ - ٨ = -٣

ض٢ = (م - ٤)(ل - ٤) = م ل - ٤م - ٤ل + ١٦

= م ل - ٤(م + ل) + ١٦

= ٣ - ٤ × ٥ + ١٦ = -١

كن مجد
https://enmujed.com

المادة : حيرا وشت ..... الدرس : ..... كلوريد حمض .....

المعادلة هي
$س^2 + 3س - 1 = 0$

---

(2) $2ل$ ، $2م$

الكل

$جمعهم = 2ل + 2م = 2(ل+م)$

$= 2 \times 5 = 10$

$ضربهم = 4لم = 4 \times 3 = 12$

$س^2 - 10س + 12 = 0$

---

(3) $\frac{1}{ل}$ ، $\frac{1}{م}$

الكل

$جمعهم = \frac{1}{ل} + \frac{1}{م} = \frac{ل+م}{لم}$

$= \frac{5}{3}$

$ضربهم = \frac{1}{ل} \times \frac{1}{م} = \frac{1}{لم} = \frac{1}{3}$

(3×) $س^2 - \frac{5}{3}س + \frac{1}{3} = 0$

$3س^2 - 5س + 1 = 0$

---

(4) $ل^2$ ، $م^2$

الكل

$جمعهم = ل^2 + م^2 = (ل+م)^2 - 2لم$

$= 25 - 2 \times 3 = 19$

$ضربهم = (لم)^2 = (3)^2 = 9$

المعادلة $س^2 - 19س + 9 = 0$

---

(5) $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

الكل

$جمعهم = \frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{(ل+م)^2 - 2لم}{لم}$

$= \frac{(5)^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{19}{3}$

$ضربهم = \frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل} = 1$

(3×) $س^2 - \frac{19}{3}س + 1 = 0$

$3س^2 - 19س + 3 = 0$

---

(6) $ل^3$ ، $م^3$

الكل

$جمعهم = ل^3 + م^3 = (ل+م)\{(ل+م)^2 - 2لم\}$

$= 5\{25 - 2 \times 3\} = 80$

$ضربهم = (لم)^3 = 27$

المعادلة

$س^2 - 80س + 27 = 0$

---

(7) $ل+م$ ، $لم$

الكل

$جمعهم = (ل+م) + لم = 5 + 3 = 8$

$ضربهم = (ل+م)(لم) = 5 \times 3 = 15$

$س^2 - 8س + 15 = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑧ $3ل+4م$ ، $2ل+3م$

الحل

جمعهم $= 3ل+2م+2ل+3م$

$= 5ل+5م = 5(ل+م)$

$= 5 \times 5 = \boxed{25}$

ضربهم $= (3ل+2م)(2ل+3م)$

$= 6ل^2 + 9لم + 4لم + 6م^2$

$= 6(ل^2+م^2) + 13لم$

$= 6 \times 19 + 13 \times 3$

$= \boxed{153}$

$س^2 - 25س + 153 = 0$

قانون العمليات الجذرية

$$ل - م = \frac{\pm\sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{أ}$$

مثال

إذا كان العمليات جذرى المعادلة $س^2 + هـ س + 2ك = 0$ يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة $س^2 + 3س + ك = 0$ فأوجد قيمة ك ؟

الحل

العمليات جذرى المعادلة الأولى

$$= \frac{\pm\sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{أ}$$

حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية

$= ك$

العمليات $=$ ضعف حاصل ضرب الجذور

$ل = \pm\sqrt{ب^2 - 4أجـ}$ بتبسيط العوامل

$ل^2 = ب^2 - 4أجـ$

$ل^2 = 9 - 4ك$

$3ل^2 + 9 = 0$

$ل(3ل + 9) = 0$

$\boxed{ل = 0}$ أو $\boxed{ل = \frac{-9}{3}}$

إذا كان $ل+1$ ، $م+1$ جذرا المعادلة $س^2 + 5س + 3 = 0$ كون المعادلة التى جذراها $ل$ ، $م$.

الحل

المعطاه

$(ل+1)+(م+1) = -5$

$ل + م + 2 = -5$ $\quad ل + م = \boxed{-7}$

$(ل+1)(م+1) = 3$

$لم + (ل+م) + 1 = 3$

$لم - 7 + 1 = 3$ $\quad لم = \boxed{9}$

$\therefore س^2 + 7س + 9 = 0$

اختر الاجابة الصحيحة -

① اذا كان $أ س^2 + 3س + 1 = 0$ ،

$س^2 + 3ب س + 1 = 0$ حيث $أ، ب$ عددان

حقيقيان مختلفان فإن $\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} = \cdots$

<u>الحل</u>

$أ$ ، $ب$ هما جذرا المعادلة $س^2 + 3س + 1 = 0$

$أ + ب = -3$ ، $أ ب = 1$

المقدار $\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} = \frac{أ^2 + ب^2}{أ ب}$

$= \frac{(أ + ب)^2 - 2أ ب}{أ ب} = \frac{9 - 2}{1} =$ [٧]

---

② اذا كان جذرا المعادلة التربيعية

$س^2 + ب س + ج = 0$ عددين حقيقيين

مختلفين فإن $ب^2 - 4ج =$ ـــــ

الحل ـــــ

الجذران حقيقيان مختلفان $\therefore ب^2 - 4ج > 0$

$\therefore$ الجذران $= \frac{\pm \sqrt{ب^2 - 4ج}}{2}$

$= \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4ج}}{2}$

بترتيب العلامتين

$ب^2 - 4ج =$ [٤]

الدرس الخامس
إشارة الدالة

حيث اشارة الدالة هي $= د(س)$

هي قيم $س$ التي تجعل $د(س)$

- موجبة: $د(س) > 0$
- صفر: $د(س) = 0$
- سالبة: $د(س) < 0$

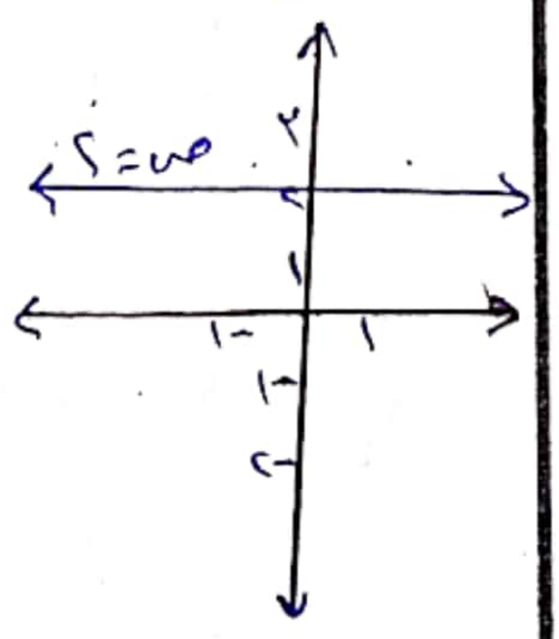
أولاً: الدالة الثابتة:-

$د(س) = ج$ حيث $ج \neq 0$

إشارة $ج$ نفس إشارة $ج$ لجميع قيم $س \in ح$

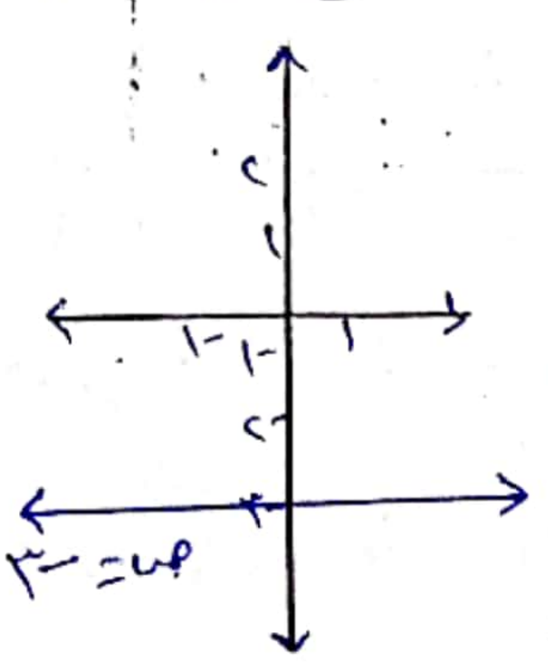
$د(س) = 2$

موجبة لجميع قيم $س \in ح$



$د(س) = -3$

سالبة لجميع قيم $س \in ح$



لاحظ حيث لا إشارة بيانيا

المنحنى أعلى محور السينات موجب

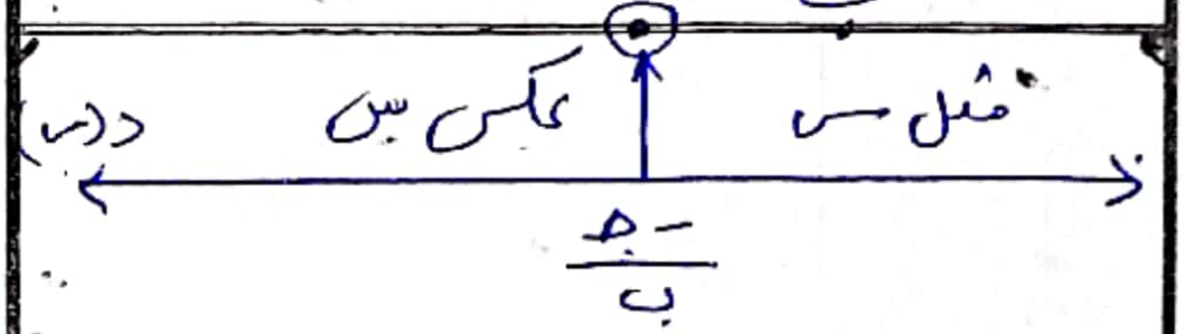
" أسفل " " " سالب

ثانيا : الدالة الخطية

د(س) = ب س + ب

لبحث إشارة نضع د(س) = ٠

س = $\frac{-ب}{ب}$ ونلاحظ



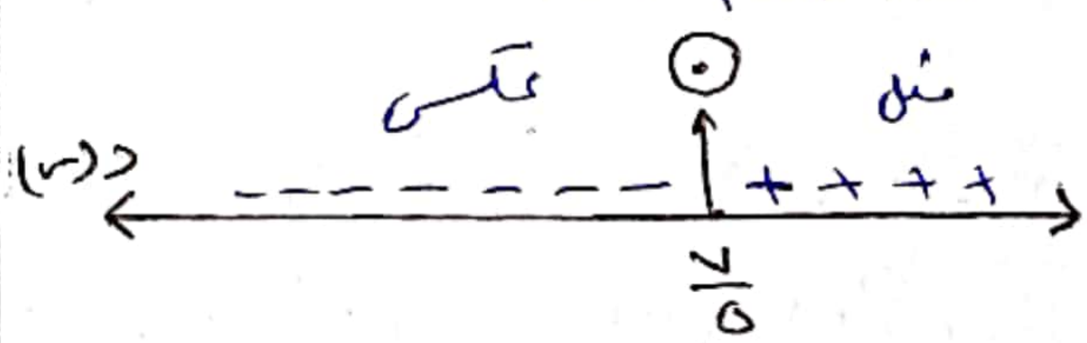
ابحث إشارة الدوال الآتية

① د(س) = ٥س - ٧

الحل

٥س - ٧ = ٠ ⟹ س = $\frac{٧}{٥}$

نستخدم خط الأعداد



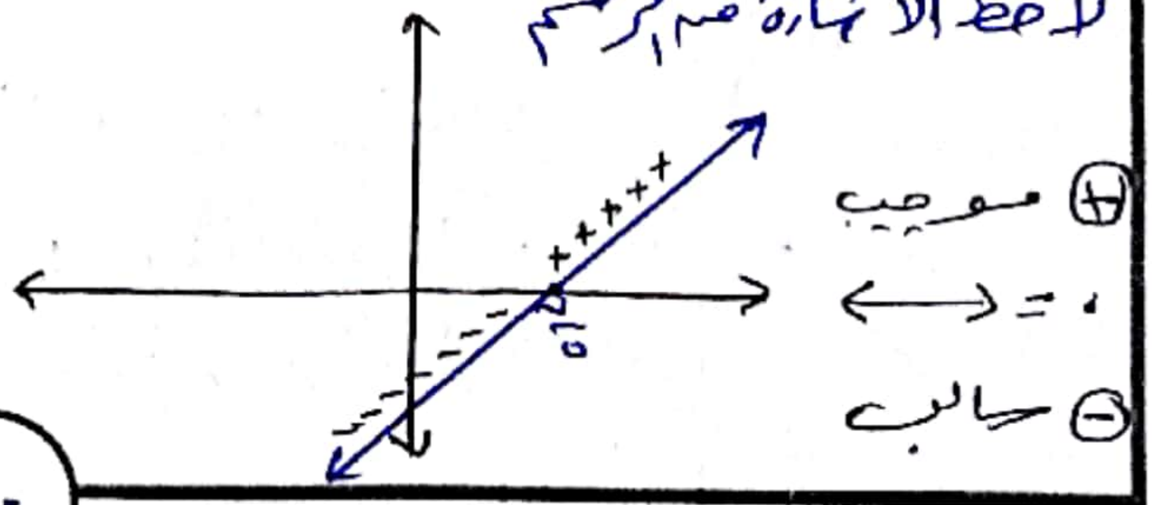
د(س) > ٠ عندما س > $\frac{٧}{٥}$

أي في الفترة $]\frac{٧}{٥}, \infty[$

د(س) < ٠ عندما س ∈ $]-\infty, \frac{٧}{٥}[$

د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٧}{٥}$

نلاحظ الإشارة في الرسم



اختر الإجابة الصحيحة

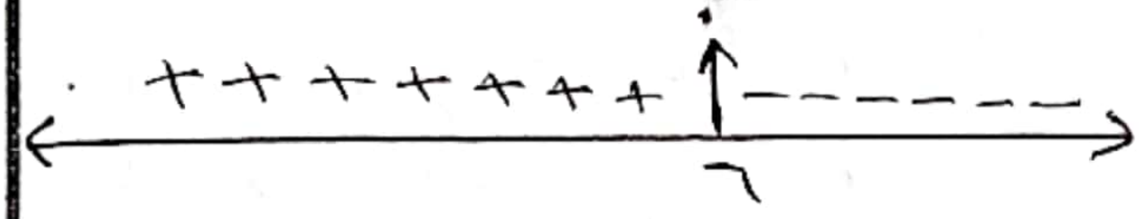
① د(س) = -٤ تكون سالبة في .....

الحل $]-\infty, \infty[$ = ح

② د(س) = ٦ - س موجبة في .....

الحل

٦ - س = ٠ ⟹ س = ٦



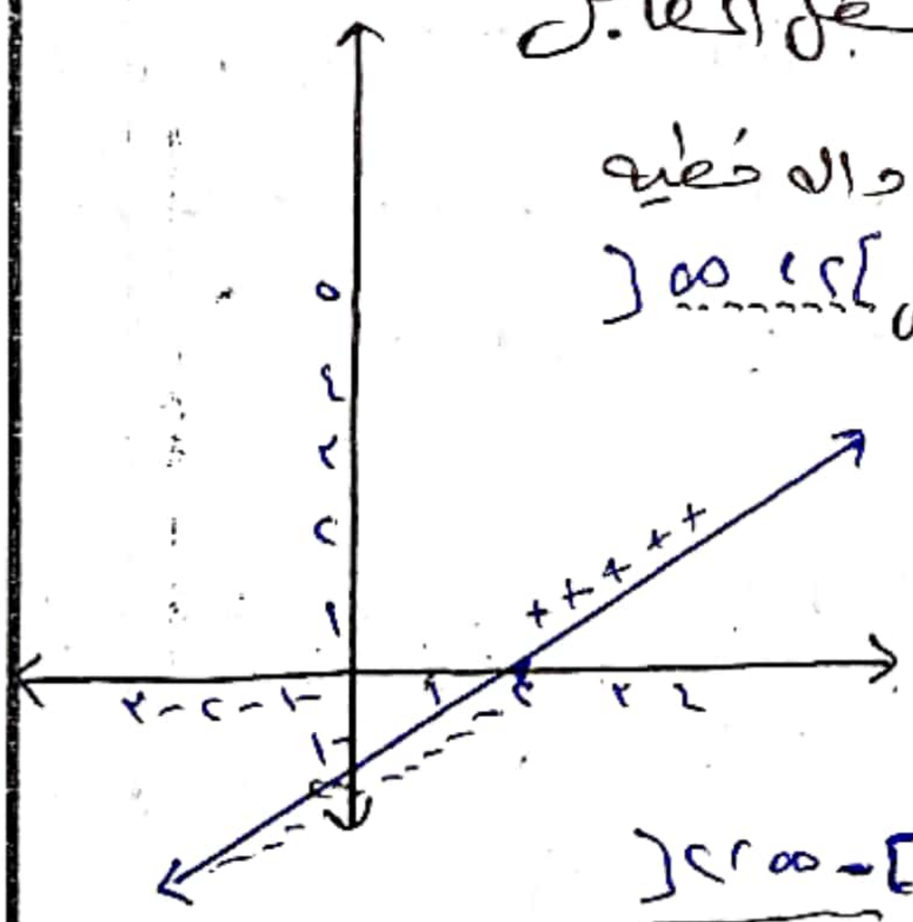
د(س) > ٠ في س < ٦

$]-\infty, ٦[$

③ من الشكل المقابل

د(س) دالة خطية

موجبة في $]٢, \infty[$



سالبة في $]-\infty, ٢[$

د(س) = ٠ عندما س = ٢

كن مجد
https://enmujed.com

ثالثا: الدالة التربيعية

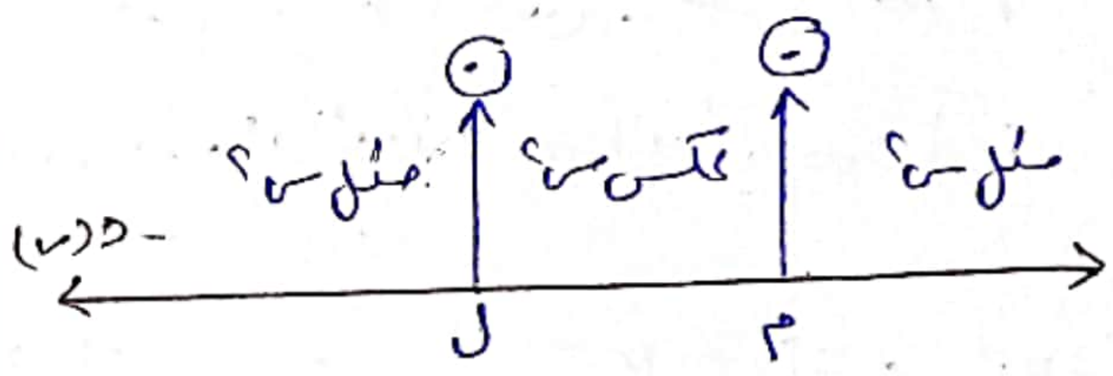
د(س) = أ س² + ب س + جـ

بوضع د(س) = ٠

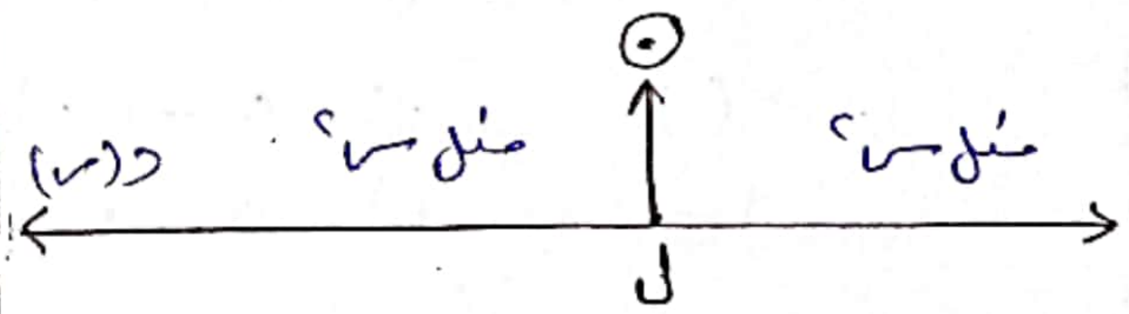
أ س² + ب س + جـ = ٠

يوجد ثلاث حالات كما درسنا

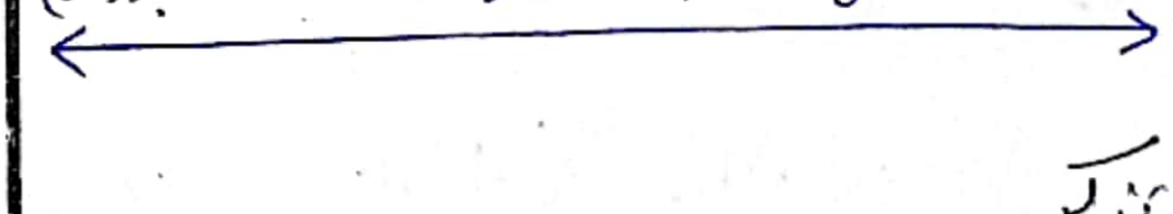
① جميعها مختلفان ل ، م



② جميعها متساويان ل ، ل



③ مركبان على جميعها ∉ ح



تذكر
يبحث الإشارة بيانيا

- موجبة: أي محور س
- صفر: محور س
- سالبة: أسفل محور س

اجعل إشارة كل من الدوال الآتية

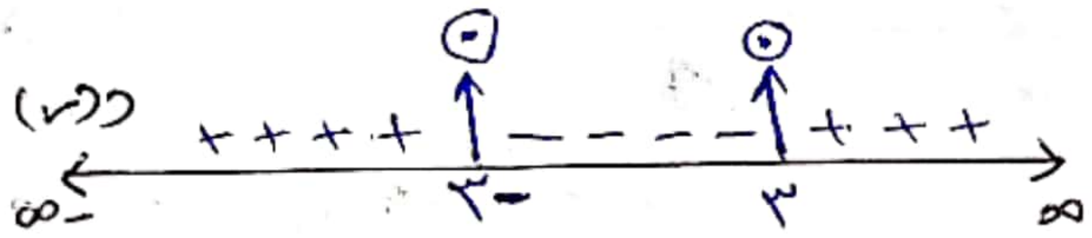
د(س) = س² − ٩

الحل

د(س) = ٠ ⟹ س² − ٩ = ٠

(س − ٣)(س + ٣) = ٠

س = ٣ أو س = −٣



د(س) > ٠ ⟹ س ∈]−∞، −٣[∪]٣، ∞[

د(س) < ٠ ⟹ س ∈]−٣، ٣[

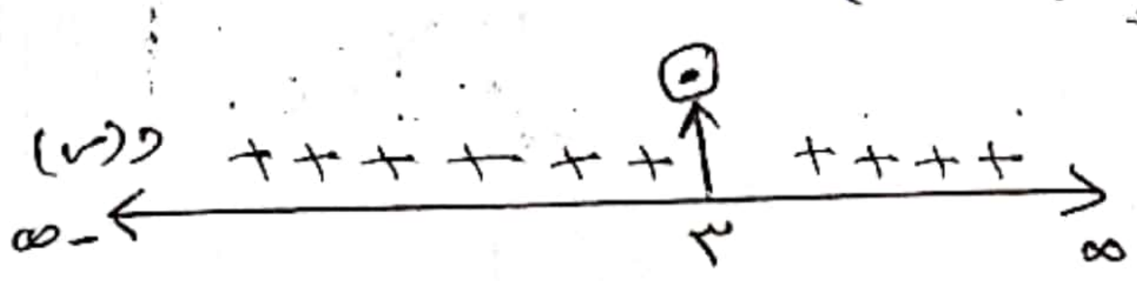
د(س) = ٠ ⟹ س ∈ {−٣، ٣}

د(س) = س² − ٦س + ٩

الحل

د(س) = ٠ ⟹ س² − ٦س + ٩ = ٠

(س − ٣)² = ٠ ⟹ حل وحيد



د(س) > ٠ ⟹ س ∈ ح − {٣}

د(س) < ٠ ⟹ س ∈ ∅

د(س) = ٠ ⟹ س ∈ {٣}

③ $د(س) = س^3 - 3س^2 + 5$

الحل

$د(س) = 0 \quad 3س^2 - 6س + 5 = 0$

$ألفا = 9 - (4 \times 3 \times 5) = -21 < 0$

لا توجد جذور حقيقية

$د(س)$ + + + + + + + +

∞ $\infty-$

موجبة لجميع قيم $س \in ح$

ارسم منحنى الدالة $د(س) = -س^3 + 3س^2 + 4$

في $[-3, 5]$ ومن الرسم عين

إشارة الدالة في هذه الفترة

الحل

$س$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$د(س)$	-11	-4	1	4	5	4	1	-4	-11

$د(س) > 0$ في $]-3, 5[$

$د(س) < 0$ في $[-3, -1[\cup]5, 5]$

$د(س) = 0$ عندما $س = \{-1, 5\}$

حيث $-1, 5 \in]-3, 5[$ هم أصفار للدالة

إذا كانت $د(س) = س^3 - 3س^2 + 5$

$د'(س) = 3س^2 - 6س$ بين

متى تكون الدالة متزايدة ومتى تكون متناقصة.

الحل

$د'(س) = 0 \quad 3س^2 - 6س = 0 \quad س = 0, 2$

$د'(س) = 0 \quad 3س(س - 2) = 0$

$س = 0$ أو $س = 2$

(٢-١)

$د'(س) > 0$ في $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$

$د'(س) < 0$ في $]0, 2[$

$د'(س)$ + + + + + + − − − − − − + + + + + +

∞ $\infty-$ 0 2

متزايدة في $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$

متناقصة في $]0, 2[$

إذا كانت $د(س) = س^3 - 3س^2 + 5$

$د'(س) = 3س^2 - 6س$ بين

متى تكون الدالة متزايدة ومتى تكون متناقصة.

الحل

$د'(س) = 0 \quad 3س^2 - 6س = 0 \quad س = 0, 2$

$د'(س) = 0 \quad 3س(س - 2) = 0$

$س = 0$ أو $س = 2$

$د'(س) > 0$ في $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$

$د'(س) < 0$ في $]0, 2[$

$د'(س)$ + + + + + + − − − − − − + + + + + +

∞ $\infty-$ 0 2

متزايدة في $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$

متناقصة في $]0, 2[$

إذا كانت $د(س) = س^3 - س$

$د'(س) = 3س^2 - 1$ بين

متى تكون الدالة متزايدة ومتى تكون متناقصة.

الحل

$د'(س) = 0 \quad 3س^2 - 1 = 0 \quad س = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$د'(س) = 0 \quad (\sqrt{3}س - 1)(\sqrt{3}س + 1) = 0$

$س = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $س = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$د'(س) > 0$ في $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$

$د'(س) < 0$ في $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

$د'(س)$ + + + + + + − − − − − − + + + + + +

∞ $\infty-$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

متزايدة في $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$

متناقصة في $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

إذا كانت $د(س) = س^3 - 3س^2 + 5$

$د'(س) = 3س^2 - 6س$ بين

متى تكون الدالة متزايدة ومتى تكون متناقصة.

الحل

$د'(س) = 0 \quad 3س^2 - 6س = 0 \quad س = 0, 2$

$د'(س) = 0 \quad 3س(س - 2) = 0$

$س = 0$ أو $س = 2$

$د'(س) > 0$ في $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$

$د'(س) < 0$ في $]0, 2[$

$د'(س)$ + + + + + + − − − − − − + + + + + +

∞ $\infty-$ 0 2

متزايدة في $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$

متناقصة في $]0, 2[$

إذا كانت $د(س) = س^3 - س$

$د'(س) = 3س^2 - 1$ بين

متى تكون الدالة متزايدة ومتى تكون متناقصة.

الحل

$د'(س) = 0 \quad 3س^2 - 1 = 0 \quad س = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$د'(س) = 0 \quad (\sqrt{3}س - 1)(\sqrt{3}س + 1) = 0$

$س = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $س = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$د'(س) > 0$ في $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$

$د'(س) < 0$ في $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

$د'(س)$ + + + + + + − − − − − − + + + + + +

∞ $\infty-$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

متزايدة في $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$

متناقصة في $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

بحث الإشارة معاً

سالبة معاً

$د'(س)$ + + + + + + − − − − − − + + + + + +

∞ $\infty-$ 3

$د'(س)$ − − − − − − + + + + + + + + + + + +

∞ $\infty-$ -1

$د'(س)$ − − − − − − + + + + + + − − − − − −

∞ $\infty-$ -1 5

سالبة معاً

سالبة معاً

بحث الإشارة معاً

سالبة معاً

$د'(س)$ + + + + + + − − − − − − + + + + + +

∞ $\infty-$ 3

$د'(س)$ − − − − − − + + + + + + + + + + + +

∞ $\infty-$ -1

$د'(س)$ − − − − − − + + + + + + − − − − − −

∞ $\infty-$ -1 5

سالبة معاً

سالبة معاً

سالبة معاً

كن مجد
https://enmujed.com

الدرس السادس
متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد

خطوات الحل

① نكتب الدالة المتعلقة المبسطة

② نوجد إشارة الدالة المتعلقة

③ نحدد الفترات التي تحقق المتباينة

المسائل

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية

① $س^2 + 2س - 8 > 0$

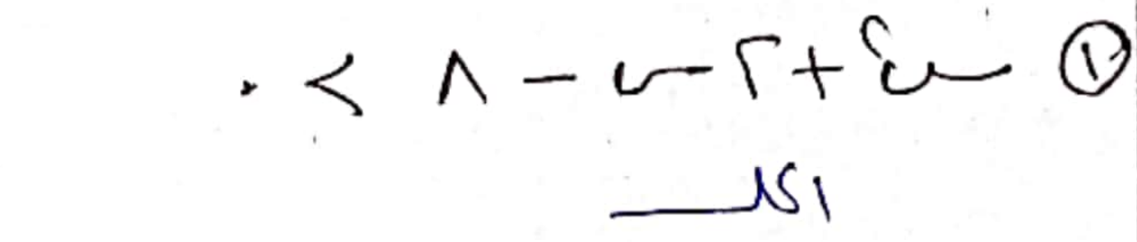
الحل

$د(س) = س^2 + 2س - 8$

$د(س) = 0$ $\quad س^2 + 2س - 8 = 0$

$(س - 2)(س + 4) = 0$

$س = 2$ أو $س = -4$



المتباينة

$د(س) > 0$ $\quad س \in]-\infty, -4[\cup]2, \infty[$

② $س^2 \leq 9$

الحل

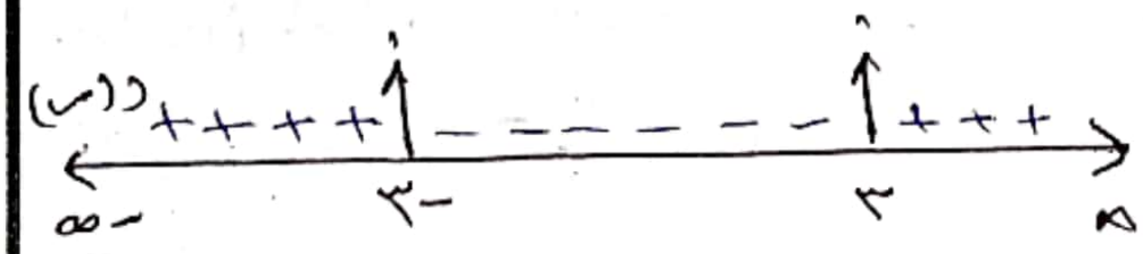
$س^2 - 9 \leq 0$

$د(س) = س^2 - 9$

$د(س) = 0$ $\quad س^2 - 9 = 0$

$(س - 3)(س + 3) = 0$

$س = 3$ $\quad س = -3$



$د(س) > 0$ $\quad س \in]-3, 3[$

$د(س) < 0$ $\quad س \in]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$

$د(س) = 0$ $\quad س \in \{-3, 3\}$

مجموعة حل المتباينة $د(س) \leq 0$

$]-\infty, 3[\cap \{-3, 3\} =]-\infty, 3]$

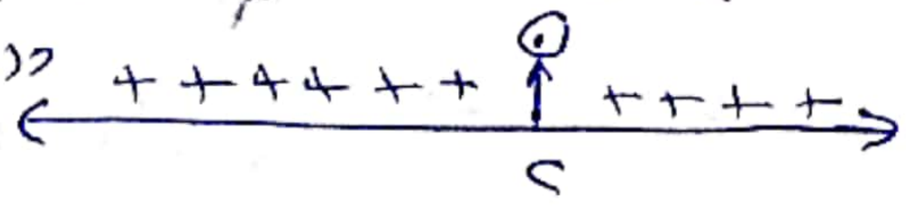
③ $س^2 - 4س + 3 \geq 0$

الحل

$د(س) = س^2 - 4س + 3$

$د(س) = 0$ $\quad س^2 - 4س + 3 = 0$

$(س - 1)^2 = 0$ $\quad س = 1$



مجموعة حل المتباينة $\{1\} \cup]4, \infty[$

$= ح$

④ $س^2 - س - 2 \geq 0$

الحل

$د(س) = س^2 - س - 2$

$د(س) = 0$ ⟸ $س^2 - س - 2 = 0$ (-١-٨)

$(س - 2)(س + 1) = 0$ ⟸ $س^2 - 2س + س - 2 = 0$

$س = 2$ أو $س = -1$

مجموعة حل المتباينة $د(س) < 0$

هي $ح =]-1، 2[$

---

⑤ $5 - 2س \leq س^2$

الحل

$5 - 2س - س^2 \leq 0$

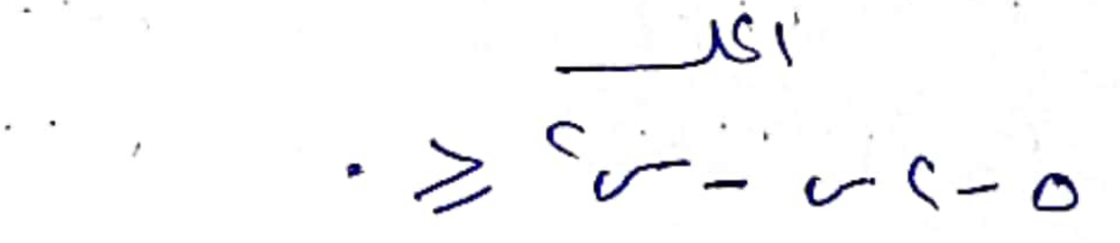
$د(س) = 5 - 2س - س^2$

$د(س) = 0$ ⟸ $5 - 2س - س^2 = 0$ (-١-٨)

$س^2 + 2س - 5 = 0$

المميز $= 4 - 4 \times 1 \times -5 = 24 > 0$

الجذور هما $\{-1 + \sqrt{6}، -1 - \sqrt{6}\}$

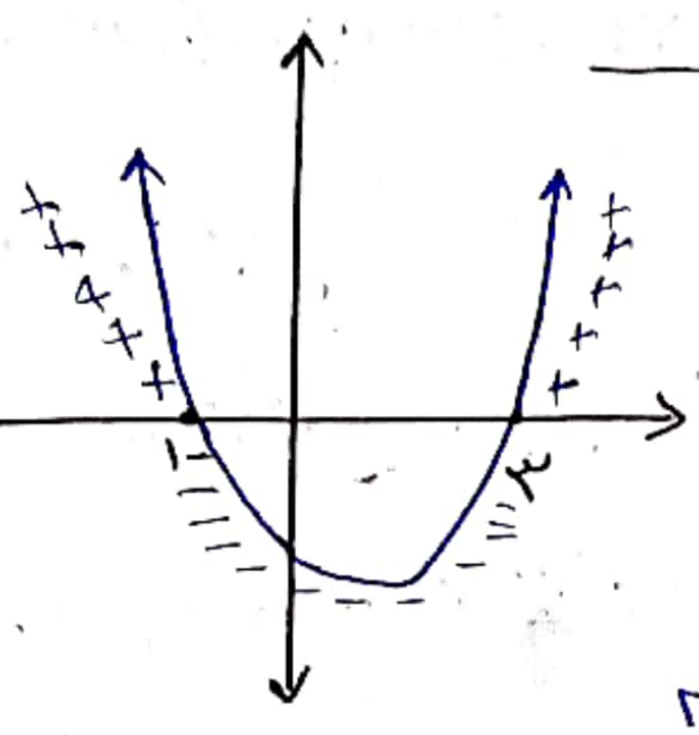


مجموعة حل المتباينة $د(س) \leq 0$

$= ح =]-\infty، -1-\sqrt{6}] \cup [-1+\sqrt{6}، \infty[$

---

⑥ من الشكل المقابل $د(س)$ تمثل دالة تربيعية فإن مجموعة حل المتباينة $د(س) \geq 0$ هي



ومنه $س \in$

$د(س) > 0$ ⟸ $س \in]-\infty، -1[\cup]3، \infty[$

$د(س) = 0$ ⟸ $س \in \{-1، 3\}$

مجموعة حل المتباينة $ح =]-\infty، -1[\cup]3، \infty[$

---

⑦ اذا كانت مجموعة حل المتباينة التالية $س^2 - 4 \leq س + ل$ هي $ح = [-2، 3]$

فإن $ل =$ ----

الحل

المتباينة $س^2 - س - 4 - ل \leq 0$

$\because$ مجموعة الحل $[-2، 3]$ $\therefore$ $\{-2، 3\}$

هما جذرا المعادلة المرتبطة

حاصل ضربهما $= -6 \times 1 = -6 = \frac{-4 - ل}{1}$

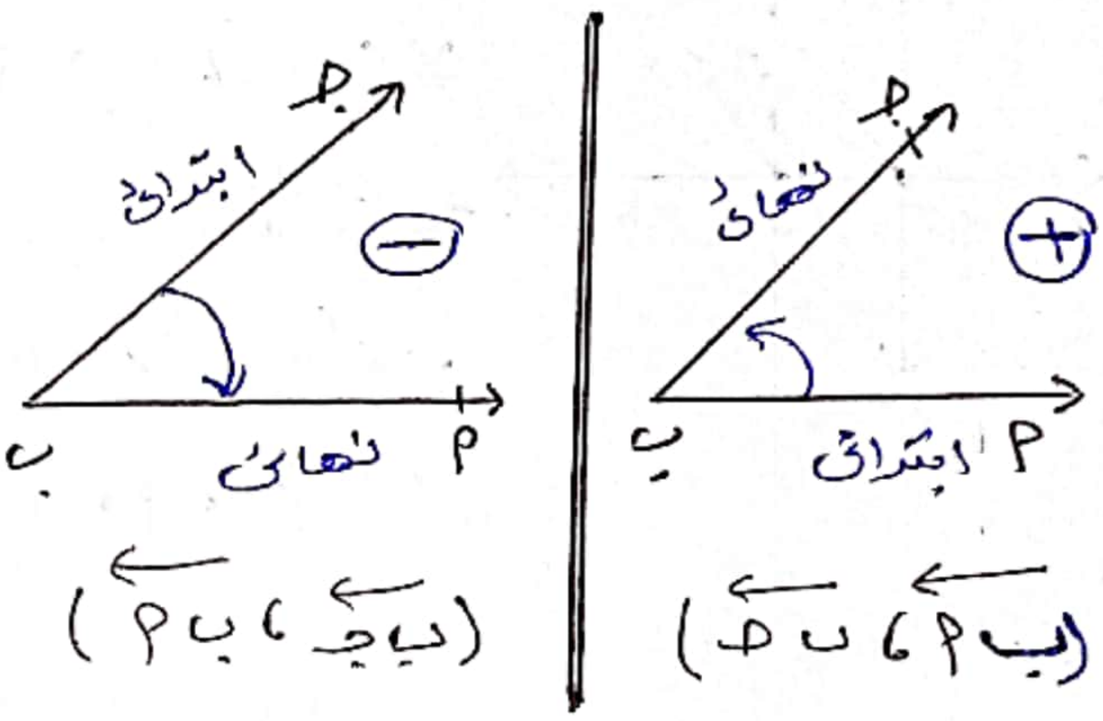
$\therefore -4 - ل = -6 \Leftarrow ل = -4 + 6$

$\boxed{ل = 2}$

كن مجد
https://enmjed.com

الدرس الأول
الزاوية الموجهة

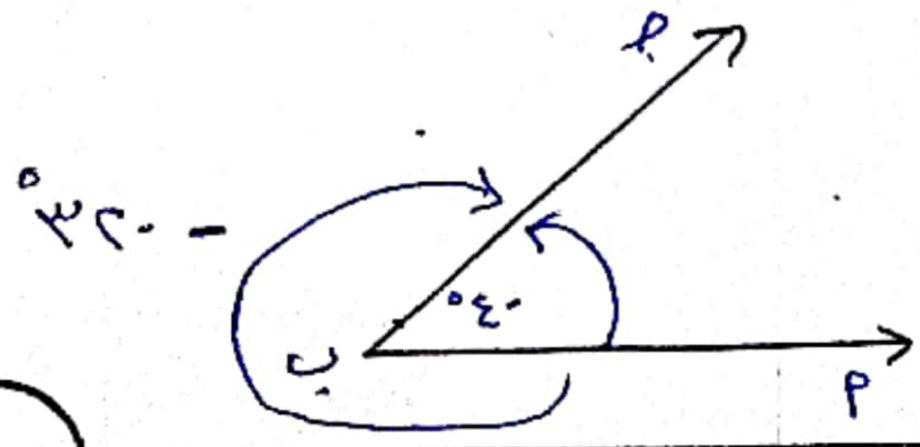
زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ومرا نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.



القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

لاحظ أن

كل زاوية موجهة قياساها أحدهما موجب والآخر سالب



أي أن

القياس الموجب لزاوية موجهة سالبة
= الزاوية + ٣٦٠°

القياس السالب لزاوية موجهة موجبة
= الزاوية - ٣٦٠°

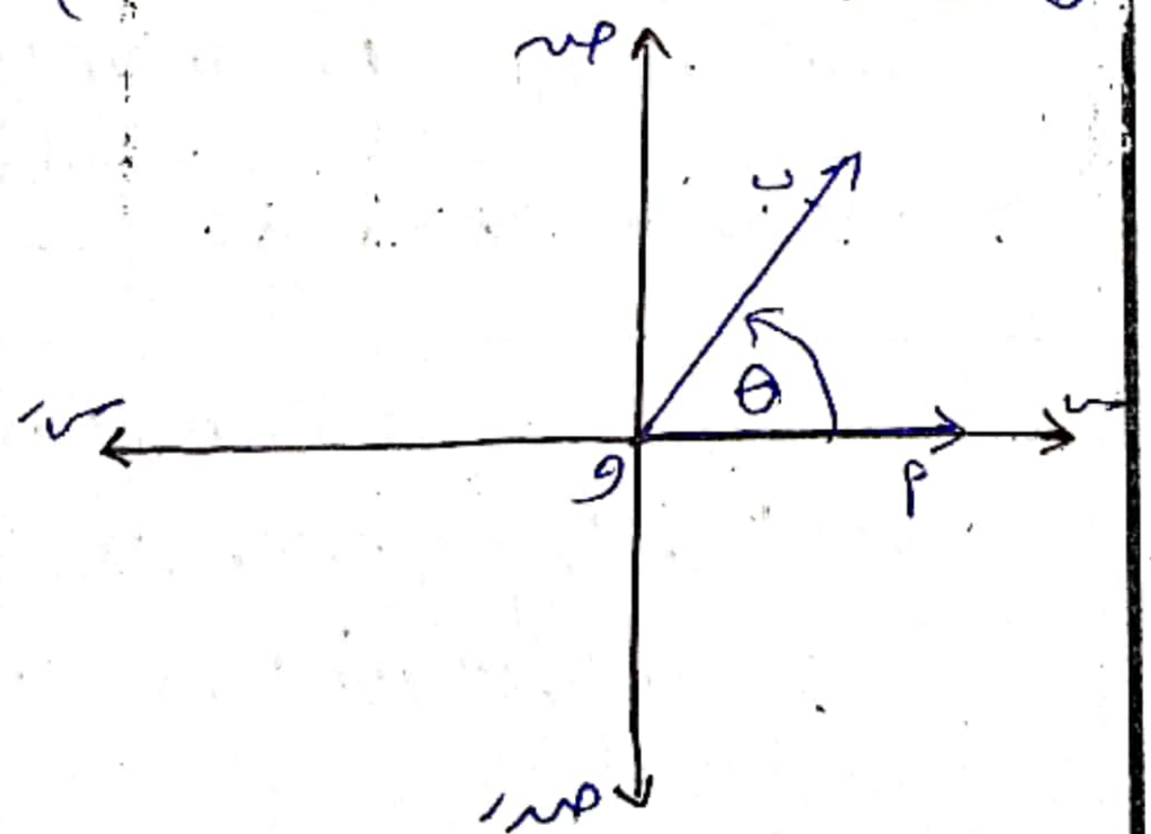
اكمل

① القياس السالب لزاوية موجهة قياسها ٥٠°
= ٥٠° - ٣٦٠° = -٣١٠°

② القياس الموجب لزاوية موجهة قياسها -٧٠°
= -٧٠° + ٣٦٠° = ٢٩٠°

الوضع القياسي للزاوية الموجهة

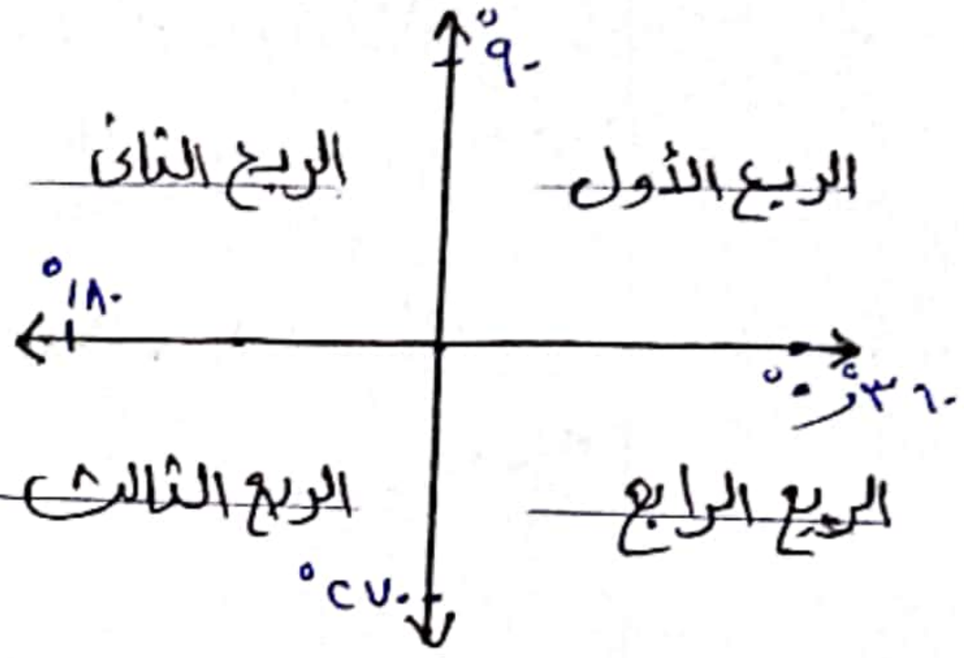
① ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور س
② رأسها نقطة الأصل و (٠ ، ٠)



∠ أ و ب الموجهة تسمى θ (سيتا)
(و أ ، و ب) من الوضع القياسي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

موقع الزاوية الموجهة في الوضع القياسي



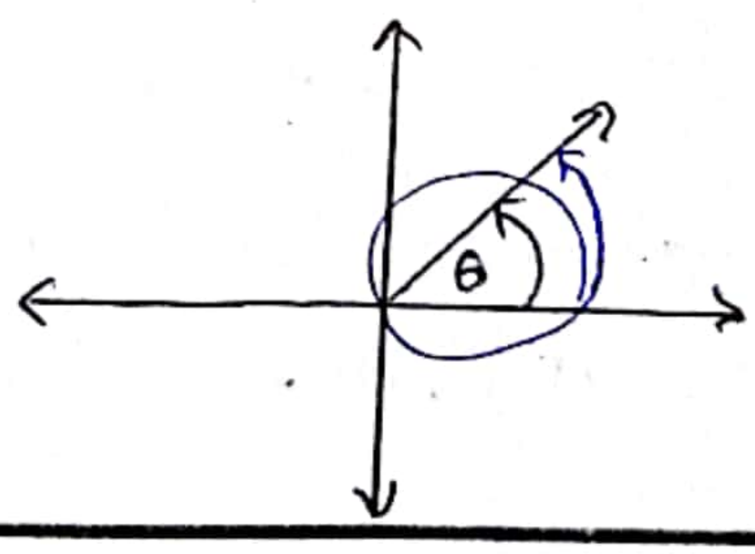
الربع	الزاوية
الأول	$0° < \theta < 90°$ أو $]0°, 90°[$
الثاني	$90° < \theta < 180°$ أو $]90°, 180°[$
الثالث	$180° < \theta < 270°$ أو $]180°, 270°[$
الرابع	$270° < \theta < 360°$ أو $]270°, 360°[$

الزاوية التي يقع ضلعها النهائي على أحد المحاور الاحداثيات ليس زاوية ربعية

$= 0°, 90°, 180°, 270°, 360°$

الزوايا المتكافئة

هي الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التي لها نفس الضلع النهائي.

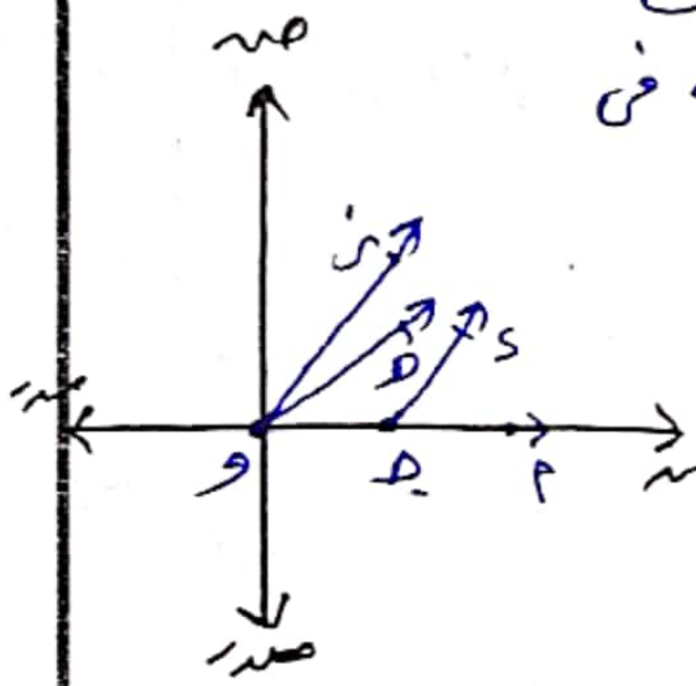


$$\theta \equiv \theta \pm (ن \times 360°)$$

حيث $ن \in ص^+$

المسائل

① أرسم الشكل المقابل.
أي الأزواج المرتبة في الوضع القياسي



① $(\overrightarrow{جـم}, \overrightarrow{هـء})$ ✗

② $(\overrightarrow{وم}, \overrightarrow{وهـ})$ ✓

③ $(\overrightarrow{وهـ}, \overrightarrow{وم})$ ✗

④ $(\overrightarrow{وم}, \overrightarrow{وز})$ ✓

② أكمل ما يأتي

① إذا كان θ أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة فإن القياس السالب $\theta - 360°$

② قياس الزاوية الربعية يكون أحد مضاعفات $90°$

③ الزاوية التي قياسها $60°$ تكافئ في الوضع القياسي زاوية قياسها $420°$

$420° = 360° + 60°$

كن مجد
https://enmujed.com

③ الزاوية التي قياسها ٩٥٠° تقع في الربع الثالث

٩٥٠ − (٢ × ٣٦٠) = ٩٥٠ − ٧٢٠

= ٢٣٠° ∈ الربع الثالث

---

④ الزاوية التي قياسها (−٨٥٠) تقع في الربع الثالث

− ٨٥٠ + (٣ × ٣٦٠)

= − ٨٥٠ + ١٠٨٠ = ٢٣٠° الثالث

---

⑤ اذا كان ق(أ ب) = ٩٠° فإن قياس زاويتين متكاملتين قياس احداهما ضعف قياس الأخرى

ق(أ ب) + ق(ب ج) = ١٨٠°

٩٠° + ق(ب ج) = ١٨٠°

ق(ب ج) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

ق(أ ب) = ق(ب ج) = ٩٠°

---

⑥ اذا كان قياس الزاوية الموجهة هو ٣٦٠° فإنها تكون زاوية ربعية

الدرس الثاني
القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية

القياس الستيني للزاوية (الدرجات)

تقاس هذه الزاوية بالدرجات (س°)

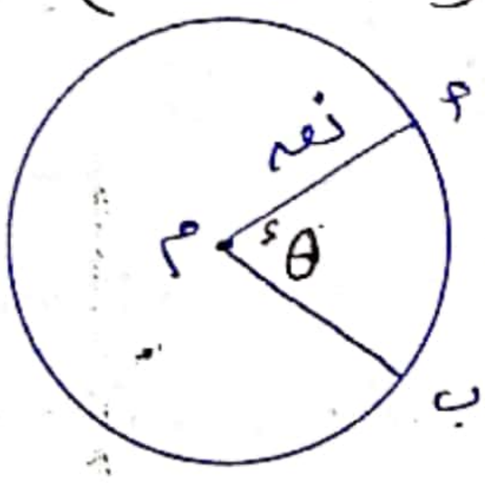
١ درجة = ٦٠ دقيقة ، ١° = ٦٠′

١ دقيقة = ٦٠ ثانية ، ١′ = ٦٠″

نستخدم مفتاح الدرجات °

القياس الدائري (الراديان)

$$\theta^c = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

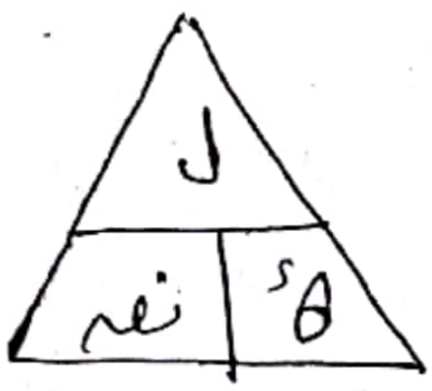


هو خارج قسمة طول القوس ÷ نصف قطر الدائرة لزاوية مركزية

$$\theta^c = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\text{ل} = \theta^c \times \text{نق}$$

$$\text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^c}$$



⑦ اذا كان لقطاع الدائرة لزاوية موجهة ق فإن قياس القياس الدائري (−٢π ، ٢π) فإنها تكون _____

زاوية ربعية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن مجد
https://enmujed.com

أوجد قياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ١٤ سم من دائرة طول نصف قطرها ٧ سم.

ل = ١٤ سم نق = ٧ سم

$\theta^c = \frac{ل}{نق} = \frac{١٤}{٧} = ٢^c$

أوجد طول نصف دائرة مرسوم بـ زاوية مركزية قياسها ٠٫٧٦٧ ق وطول القوس المقابل لها ٣٨٫٣٥ سم.

$\theta^c = ٠٫٧٦٧^c$ ل = ٣٨٫٣٥ سم

$نق = \frac{ل}{\theta^c} = \frac{٣٨٫٣٥}{٠٫٧٦٧} = ٥٠$ سم

أوجد لأقرب جزء من عشرة طول قوس من دائرة طول نصفها = ٢٠ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٢٫٤٣ ق

الحل

نق = ٢٠ سم ، $\theta^c = ٢٫٤٣^c$

$ل = \theta^c \times نق$

$= ٢٠ \times ٢٫٤٣$

$= ٤٨٫٦$ سم

العلاقة بين القياسين الستيني والدائري

س° : القياس الستيني

θ^c : القياس الدائري بالراديان

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^c}{\pi}$$

$$\theta^c = \frac{\pi}{١٨٠} \times س^\circ$$

$$س^\circ = \frac{١٨٠}{\pi} \times \theta^c$$

زاوية مركزية قياسها = ٦٠° أوجد قياسها الدائري بدلالة π.

$$\theta^c = \frac{\pi}{١٨٠} \times ٦٠^\circ = \frac{\pi}{٣}^c$$

زاوية مركزية قياسها ١٢٠° ١٩′ ١٦″ أوجد لأقرب رقم عشري واحد قياسها بالراديان

$$\theta^c = ١٢٠^\circ\ ١٩'\ ١٦'' \times \frac{\pi}{١٨٠} \simeq ٢٫١^c$$

زاوية مركزية قياسها ٨٠° ٢٥′ أوجد قياسها بالراديان لأقرب ثلاثة أرقام

$$\theta^c = ٨٠^\circ\ ٢٥' = ١٫٤٠٤^c$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن مجد
https://enmujed.com

المادة : حساب مثلثات ..... الدرس : ... الضلع ... المقابل ... والدائرة

أوجد بالدرجات قياس زاوية مركزية قياسها بالراديان كالآتي

① $3\frac{7}{10}$ ج

$س° = 3\frac{7}{10} \times \frac{180}{\pi} = 211° 9' 40''$

② $\frac{333}{4}$ ج

$س° = \frac{333}{4} \times \frac{180}{\pi} = 135°$

③ $-3\frac{1}{2}$ ج

$س° = -3\frac{1}{2} \times \frac{180}{\pi} = -(200° 37' 7'')$

أكمل ما يأتي :-

① الزاوية التي قياسها $\frac{13\pi}{6}$ تقع في الربع الثالث

$س° = \frac{13\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 390°$

$س° = 390° - (360 \times 1) = 30°$

∴ $س°$ في الربع الأول

② الزاوية التي قياسها $\frac{-19\pi}{4}$ تقع في الربع الرابع

$س° = \frac{-19\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = -405°$

$س° = -405° + (360 \times 2)$

$= 315°$ الربع الرابع

③ طول القوس من دائرة طول قطرها 12 سم ويقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{3}$ ج

الحل

$\theta° = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60°$

$ل = \theta° \times \frac{\pi}{180} \times نق = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$ سم

④ إذا كانت أحد زوايا مثلث $75°$ والزاوية الثانية $\frac{\pi}{3}$ فأوجد الثالثة بالراديان

الزاوية الثانية $= \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60°$

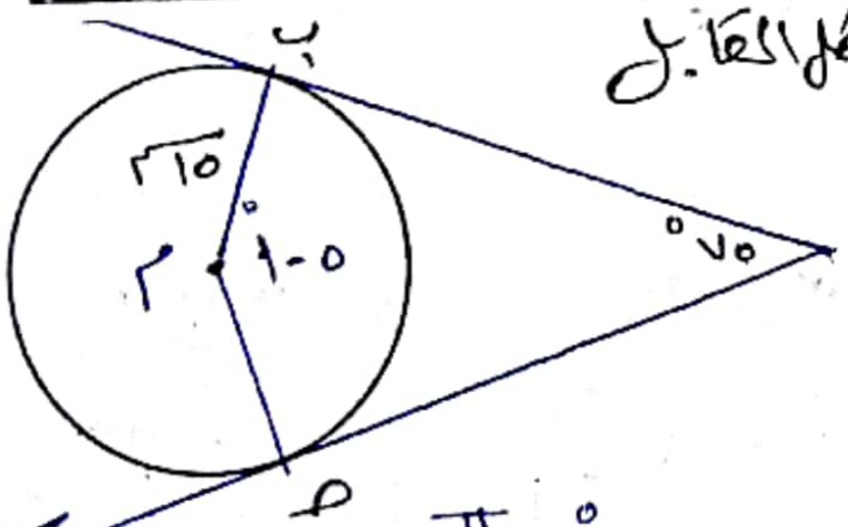
∴ الثالثة $= 180 - (60 + 75) = 45°$

$\theta° = 45° \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ ج

⑤ في الدائرة التي طول نصف قطرها الواحد يكون قياس الزاوية المركزية بالراديان =

$\theta° = \frac{ل}{نق} = ل$ = طول القوس

⑥ على الشكل المقابل



$ق(\overset{\frown}{أ ق ب}) = 105° \times \frac{\pi}{180} \times 1.5 \simeq 2.749$ سم

الزوايا الخاصة بالراديان

$$\frac{\pi}{3}\ ^c = \frac{\pi}{180} \times 60^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{6}\ ^c = \frac{\pi}{180} \times 30^\circ = 30^\circ$$

$$\frac{\pi}{4}\ ^c = \frac{\pi}{180} \times 45^\circ = 45^\circ$$

الزوايا الربعية بالراديان

$$0^c = \frac{\pi}{180} \times 0 = 0^\circ$$

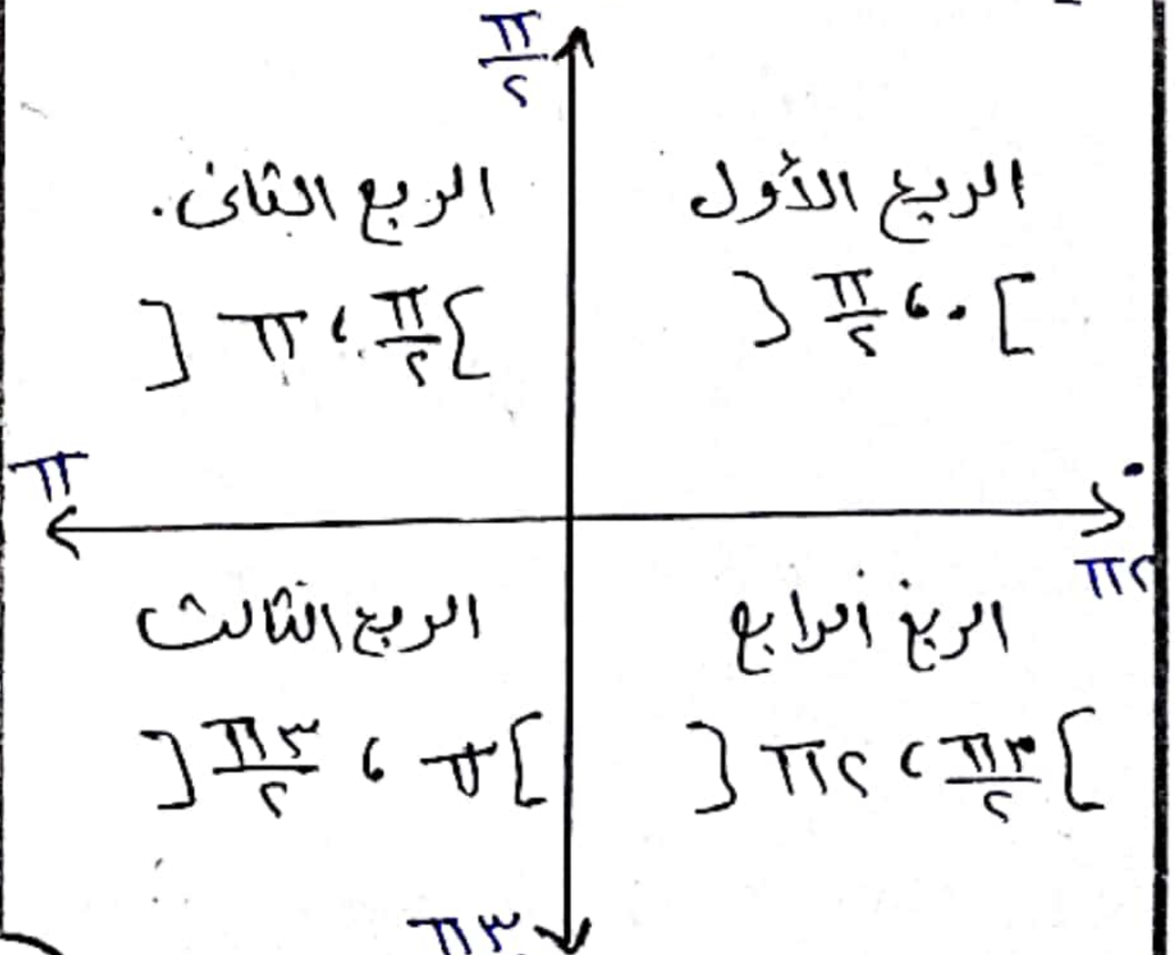
$$\frac{\pi}{2}\ ^c = \frac{\pi}{180} \times 90^\circ = 90^\circ$$

$$\pi^c = \frac{\pi}{180} \times 180^\circ = 180^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2}\ ^c = \frac{\pi}{180} \times 270^\circ = 270^\circ$$

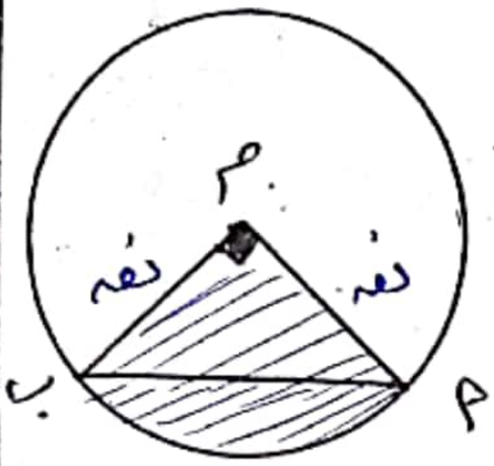
$$2\pi^c = \frac{\pi}{180} \times 360^\circ = 360^\circ$$

وحيث كتابة الأرباع بالدائري كالتالي



اذا كانت مساحة ∆ م ا ب = ٣٢ سم²

أوجد محيط الشكل المظلل الأقرب لعشر



الحل

مساحة ∆ م ا ب = ½ نق × نق

½ نق² = ٣٢

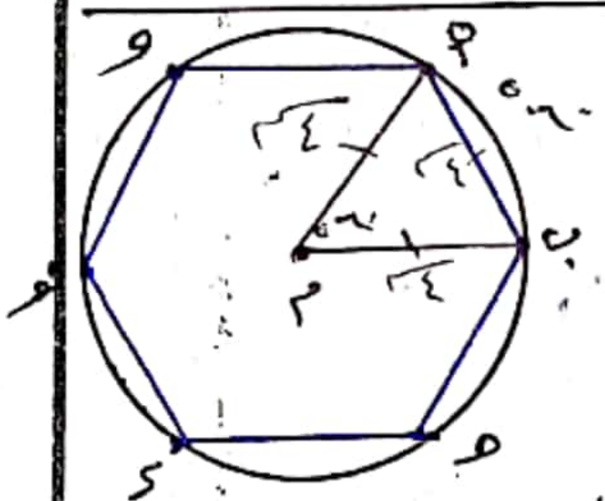
نق² = ٦٤ ⇐ نق = ٨ سم

ق(∠م) = ٩٠° = π/2 ^c

ل = θ ^c × نق = π/2 × ٨ = ٤π سم

∴ المحيط = ل + ٢نق

= ١٦ + ٤π ≃ ٢٨,٥٧ سم



في الشكل المقابل

ا ب ج د ه و سداسي منتظم

طول ضلعه ٤ سم

مرسوم داخل دائرة

فأوجد طول $\overset{\frown}{ا ب}$ =

الحل

∵ الشكل منتظم ∴ ق($\overset{\frown}{ا ب}$) = $\frac{360}{6}$ = ٦٠°

∴ ق(∠ا م ب) = ٦٠° = π/3 ^c

∵ ∆ ا م ب متساوي الأضلاع ⇐ نق = ٤ سم

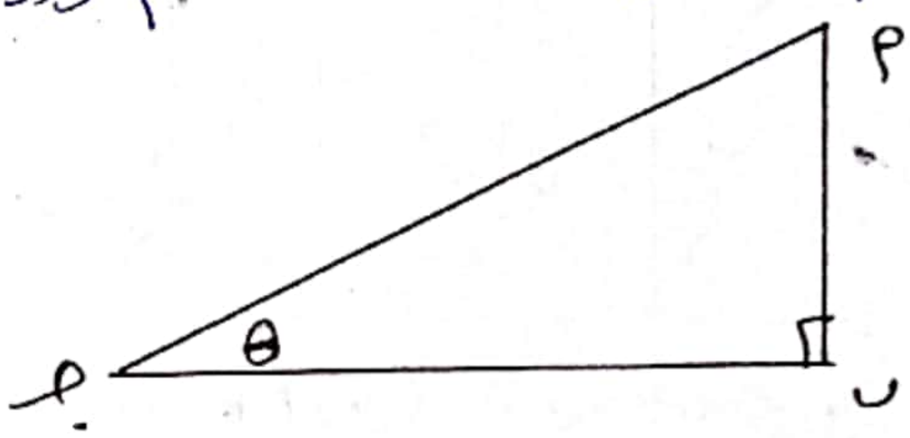
طول $\overset{\frown}{ا ب}$ = ل = θ ^c × نق

= π/3 × ٤ = ٤π/3 سم

كُن مُجِدّ
https://enmujd.com

الدرس الثالث
الدوال المثلثية

نفرض أنه في $\triangle$ أ ب جـ القائم الزاوية في ب



$$\text{جا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

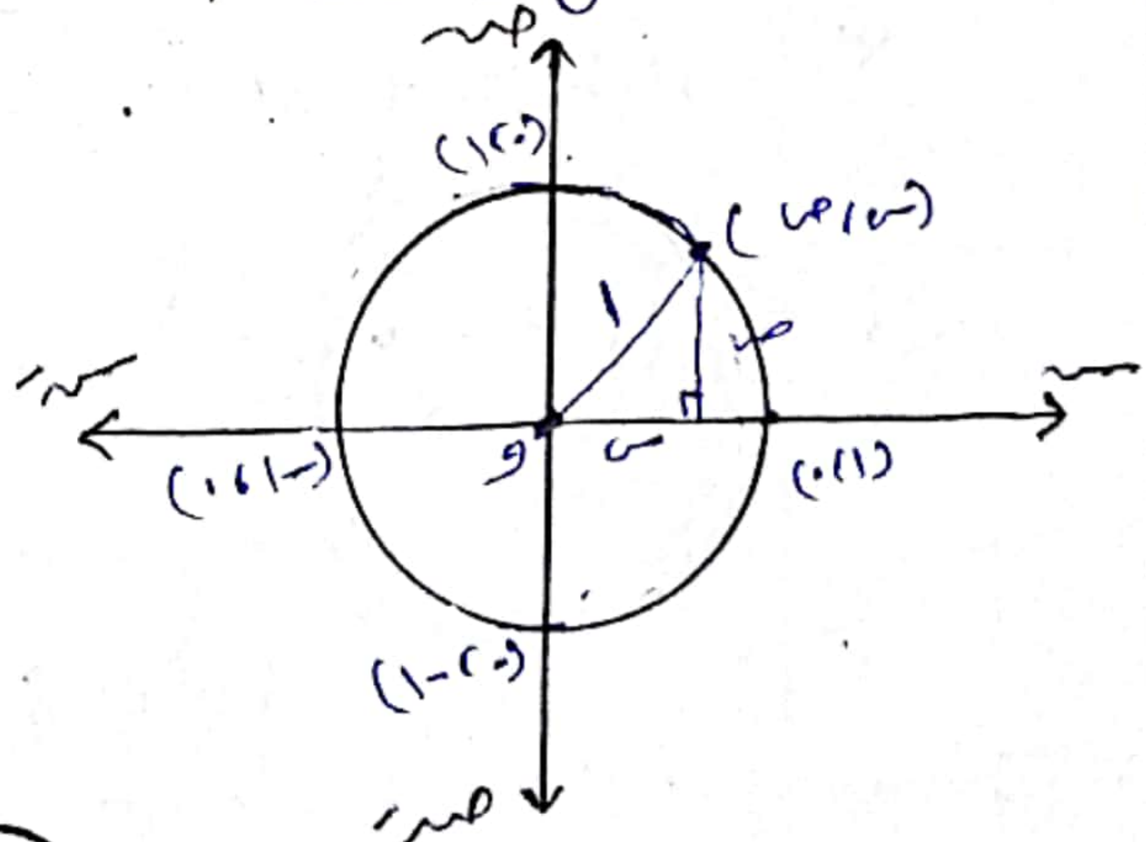
$$\text{جتا}\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$$

تسمى هذه النسب بالدوال المثلثية

دائرة الوحدة

مركزها نقطة الأصل و وطول نصف القطر = القطعة



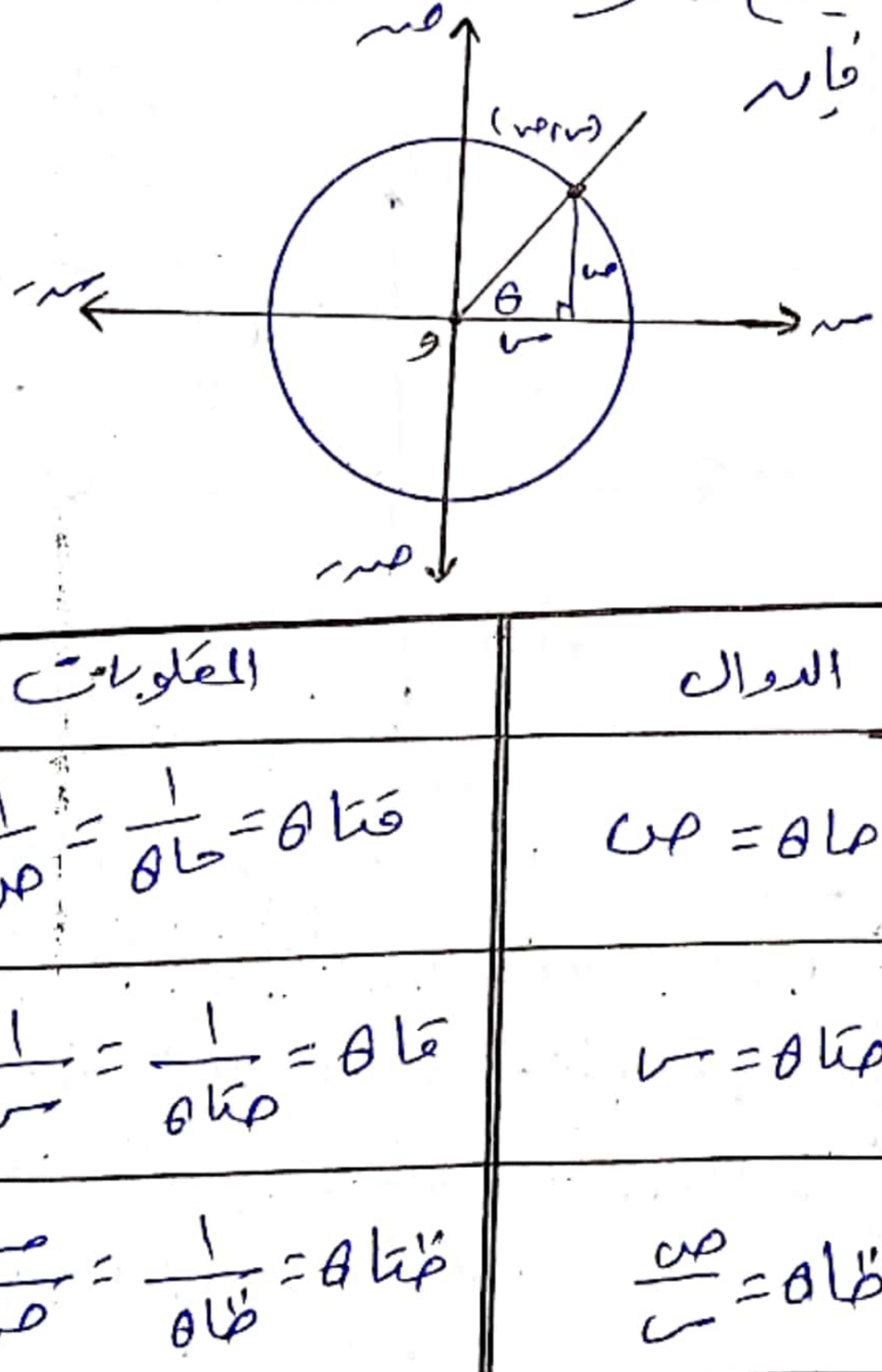
نلاحظ أي نقطة د لدائرة الوحدة (س، ص) يكون

$$\boxed{\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1}$$

فيثاغورث

الدوال المثلثية الإحداثية

إذا رسمت الزاوية الموجبة في وضعها القياسي θ وكان ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في م (س، ص) فإنه



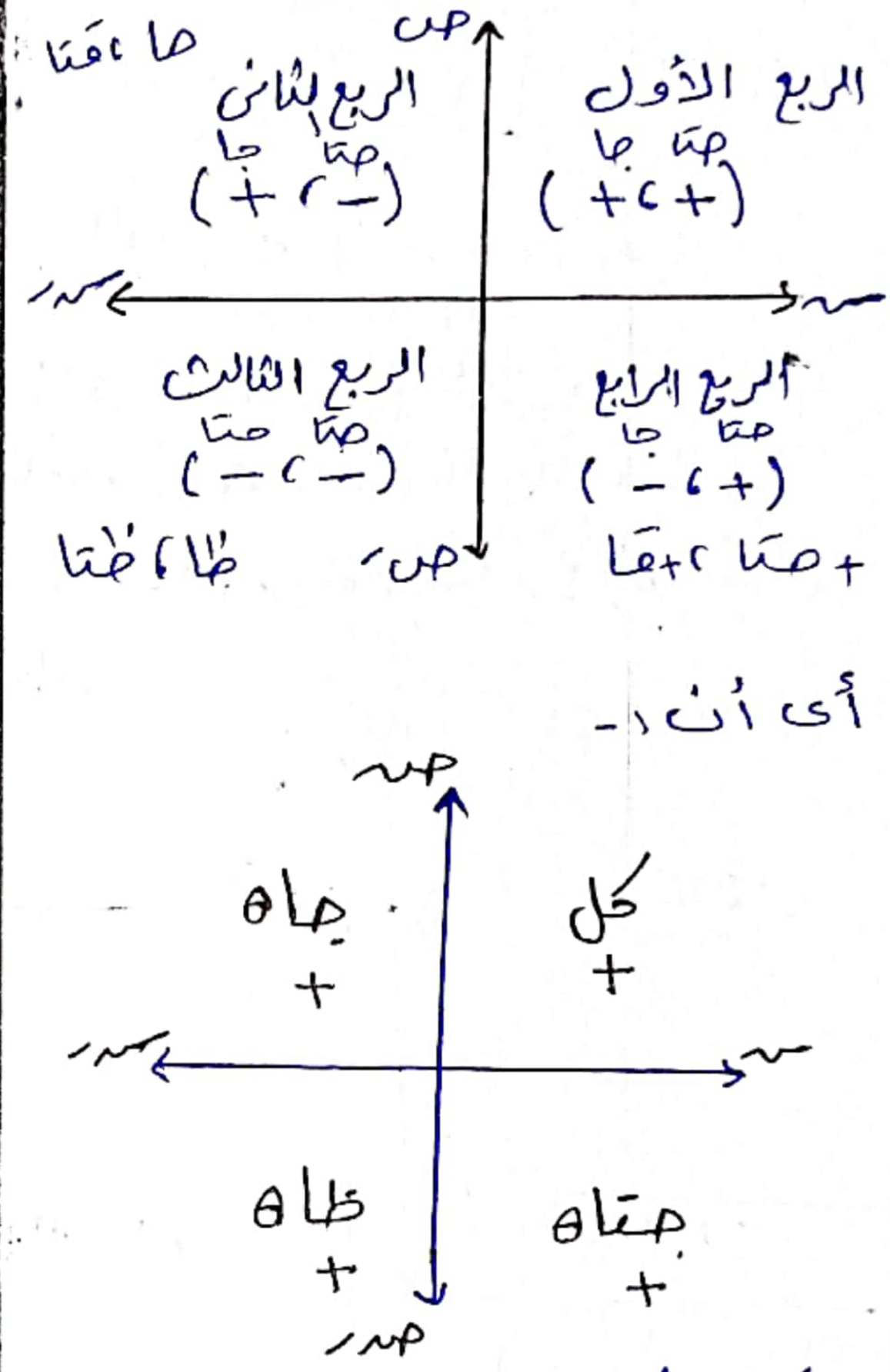
الدوال	المعلومات
$\text{جا}\theta = \text{ص}$	$\text{قتا}\theta = \frac{1}{\text{جا}\theta} = \frac{1}{\text{ص}}$
$\text{جتا}\theta = \text{س}$	$\text{قا}\theta = \frac{1}{\text{جتا}\theta} = \frac{1}{\text{س}}$
$\text{ظا}\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$	$\text{ظتا}\theta = \frac{1}{\text{ظا}\theta} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

أي أن

$$\text{م}(\text{س}، \text{ص}) = (\text{جتا}\theta، \text{جا}\theta)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

إحارة الدوال المثلثية



جتا θ + جا θ

أى أن :-

كل + ، جتا θ + ، جا θ + ، ظا θ +

كل ربع ظا لم جتا واحد

اذا كان ضلع النهائى لزاوية موجهة θ
فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة
فى النقطة ب فاوجد جميع الدوال
المثلثية للزاوية θ اذا كانت

① ب $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$

الحل

جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $\frac{٤}{٥}$

ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

---

② ب $(\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥})$

الحل

جتا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا θ = $\frac{٣}{٥}$

ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، ظتا θ = $\frac{٤}{٣}$

قا θ = $\frac{٥}{٤}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٣}$

---

② ب $(س ، ٠٫٨٦)$ حيث س > ٠ ، الحل

$\because$ $س^٢ + ص^٢ = ١$

$س^٢ + (٠٫٨)^٢ = ١$

$س^٢ = ١ - ٠٫٦٤ = ٠٫٣٦$

$س = \pm \sqrt{٠٫٣٦} = \pm ٠٫٦$

$\because$ س > ٠ $\therefore$ س = ٠٫٦

$\therefore$ ب (٠٫٦ ، ٠٫٨)

جتا θ = ٠٫٦ ، جا θ = ٠٫٨

ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

---

③ $(س^٢ - ٥س)$ س > ٠

الحل

$س^٢ + س^٢ = ١$

$٢س^٢ = ١$ ، $س^٢ = \frac{١}{٢}$

$س = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\therefore$ $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ = قتا θ ، $\frac{١٠}{٨}$ = جا θ = ٠٫٨

$\frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$ = قا θ ، $\frac{١٠}{٦}$ = جتا θ = ٠٫٦

ظا θ = $\frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

ب $(\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ -\frac{2}{\sqrt{5}})$ ، θ ∈ الربع الثاني

$\text{جا}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\text{جتا}\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\text{ظا}\theta = -\frac{1}{2}$ ، $\text{ظتا}\theta = -2$

---

④ $(\frac{3}{5}\rho\ ,\ -2\rho)$ ، $\theta \in]\frac{3\pi}{2}\ ,\ 2\pi[$

الحل

$س^2 + ص^2 = 1$

$(\frac{3}{5}\rho)^2 + (-2\rho)^2 = 1$

$\frac{9}{25}\rho^2 + 4\rho^2 = 1$

$\frac{25}{25}\rho^2 = 1 \Leftarrow \rho^2 = \frac{1}{25}$

$\rho = \pm\frac{1}{5}$ ∴ θ تقع للربع الرابع

∴ س > 0 ، ص < 0 ⇔ ρ > 0

∴ $\rho = \frac{1}{5}$

∴ ب $(\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}\ ,\ -2 \times \frac{1}{5})$

ب $(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{2}{5})$

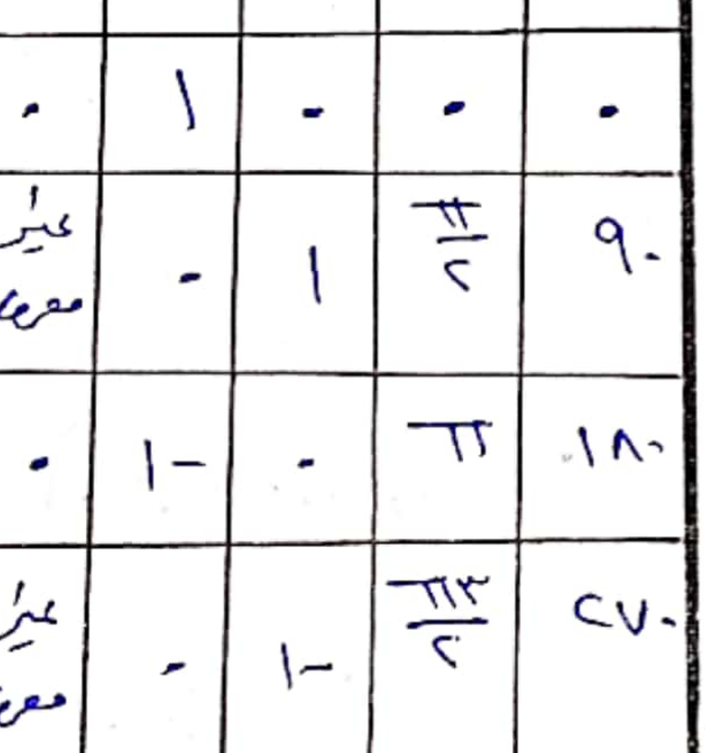
جاθ = $-\frac{2}{5}$ ، جتاθ = $\frac{3}{5}$

ظاθ = $-\frac{2}{3}$ ، ظتاθ = $-\frac{3}{2}$

قاθ = $\frac{5}{3}$ ، قتاθ = $-\frac{5}{2}$

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

① الزوايا الربعية



	جا	جتا	ظا	قتا	قا	ظتا
٠	٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف
٩٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف	٠
١٨٠	٠	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف
٢٧٠	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف	٠
٣٠°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	٢	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
٦٠°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	٢	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
٤٥	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	١

ملاحظة

الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة فط نفس الإشارة.

أكمل ما يأتي

① إذا كان ظا θ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ = ---- °٤٥

② إذا كان جا θ = -١ ، ٠ ≤ θ < ٣٦٠° فإن θ = ---- °٢٧٠

③ قتا θ = ٢ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ = ---- °٣٠

④ ظتا² ٣٠° − جا² ٦٠° + قتا² ٤٥° = ----

الحل

$(\sqrt{3})^2 - (2)^2 + (\sqrt{2})^2$

$= 3 - 4 + 2 = 1$

⑤ ٣ جا ٣٠° ظا² ٦٠° − ظتا ٣٠° جتا ٦٠° + جا ٢٧٠° قتا² ٤٥°

الحل

$= (3 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2) - (\sqrt{3} \times \frac{1}{2}) + (1 \times 2)$

$+ (-1 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$

$= \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - 1 = \boxed{\frac{11}{2}}$

في الشكل المقابل

دائرة مركزها و، ١ ∈ $\overline{و ب}$ ، $\overline{ب ج}$ ⊥ $\overline{و ب}$

أوجد

① و ب = $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$ = ظا θ

جتا θ = $\frac{1}{\text{ظتا } \theta}$ ⇐ و ب = $\frac{1}{\text{جتا } \theta}$ = قتا θ

② ب ج = (قتا θ) − ١

ب ج = ب و − و ج = (قتا θ) − ١

③ مساحة Δ ا ب و = $\frac{1}{2}$ ظتا θ

ظا θ = $\frac{\text{ا ب}}{1}$ ⇐ ا ب = ظا θ

مساحة Δ ا ب و = $\frac{1}{2}$ × ا ب × و ب

$= \frac{1}{2} \times$ ظا θ × ١ = $\frac{1}{2}$ ظا θ

في الشكل المقابل

ظا ب + ظا جـ = $\frac{5}{2}$

فإن ب ج = ----

الحل

∵ ظا ب = $\frac{\text{ا د}}{\text{ب د}}$ ، ظا جـ = $\frac{\text{ا د}}{\text{د جـ}}$

ظا ب + ظا جـ = $\frac{4}{\text{ب د}} + \frac{4}{\text{د جـ}} = \frac{5}{2}$

$\frac{4(\text{ب د} + \text{د جـ})}{\text{ب د} \times \text{د جـ}} = \frac{5}{2}$ ⇐ $\frac{4(\text{ب جـ})}{4^2} = \frac{5}{2}$

∴ ب جـ = ١٠ سم

كن مجد
https://cunmjad.com

الدرس الرابع
الزوايا المنتسبة

الزاويتان المنتسبتان

هما اللتان مجموعهما أو الفرق بينهما عدد من أنصاف القوائم ($90°, 180°, \ldots$)

---

١ العلاقة بين الزاويتان θ ، $(180° - \theta)$ الثانية

$$\text{جا}(180° - \theta) = \text{جا}\,\theta$$

$$\text{جتا}(180° - \theta) = -\text{جتا}\,\theta$$

$$\text{ظا}(180° - \theta) = -\text{ظا}\,\theta$$

بالمثل المقلوبات

مثال

$$\text{جا}\,120° = \text{جا}(180° - 60°) = \text{جا}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

٢ الزاويتان θ ، $(180° + \theta)$ الثالثة

$$\text{جا}(180° + \theta) = -\text{جا}\,\theta$$

$$\text{جتا}(180° + \theta) = -\text{جتا}\,\theta$$

$$\text{ظا}(180° + \theta) = \text{ظا}\,\theta$$

بالمثل المقلوبات

مثال

$$\text{جتا}\,225° = \text{جتا}(180° + 45°) = -\text{جتا}\,45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

---

٣ الزاويتان θ ، $(360° - \theta)$ الرابعة

$$\text{جا}(360° - \theta) = -\text{جا}\,\theta$$

$$\text{جتا}(360° - \theta) = \text{جتا}\,\theta$$

$$\text{ظا}(360° - \theta) = -\text{ظا}\,\theta$$

بالمثل المقلوبات

مثال

$$\text{ظا}\,300° = \text{ظا}(360° - 60°) = -\text{ظا}\,60°$$

$$= -\sqrt{3}$$

---

٤ الزاويتان θ ، $(90° - \theta)$ الأولى

$$\text{جا}(90° - \theta) = \text{جتا}\,\theta$$

$$\text{جتا}(90° - \theta) = \text{جا}\,\theta$$

$$\text{ظا}(90° - \theta) = \text{ظتا}\,\theta$$

بالمثل المقلوبات

مثال

$$\text{جا}\,30° = \text{جتا}\,60° = \frac{1}{2}$$

---

٥ الزاويتان θ ، $(90° + \theta)$ الثانية

$$\text{جا}(90° + \theta) = \text{جتا}\,\theta$$

$$\text{جتا}(90° + \theta) = -\text{جا}\,\theta$$

$$\text{ظا}(90° + \theta) = -\text{ظتا}\,\theta$$

بالمثل المقلوبات

مثال

$$\text{جا}\,120° = \text{جا}(90° + 30°) = \text{جتا}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن مجد
https://enmujed.com

٦ الزاويتان θ ، $(\theta - ٢٧٠)$ الثانية

$$\text{ا}(\theta - ٢٧٠) = -\text{ا}\theta$$

$$\text{ا}(\theta - ٢٧٠) = -\text{ا}\theta$$

$$\text{ظ}(\theta - ٢٧٠) = -\text{ظ}\theta$$

بالمثل العكوسة

مثال

$$\text{ا}١٢٠ = \text{ا}(-٢٧٠ + ٦٠) = -\text{ا}٦٠ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

---

٧ الزاويتان θ ، $(\theta + ٢٧٠)$ الرابعة

$$\text{ا}(\theta + ٢٧٠) = -\text{ا}\theta$$

$$\text{ا}(\theta + ٢٧٠) = \text{ا}\theta$$

$$\text{ظ}(\theta + ٢٧٠) = -\text{ظ}\theta$$

بالمثل العكوسة

$$\text{ظ}٣٣٠ = \text{ظ}(٦٠ + ٢٧٠) = -\text{ظ}٦٠$$

$$= -\frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$\text{جتا}٣١٥ = \text{جتا}(٤٥ + ٢٧٠)$$

$$= \text{جا}٤٥ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

يمكن تلخيص العلاقات كالآتي

جا	كل
$٩٠ - \theta$	θ

ظا	جتا
$\theta + ١٨٠$	$\theta - ٣٦٠$

تغير الإشارة فقط

جا	كل
$\theta + ٩٠$	$\theta - ٩٠$

ظا	جتا
$\theta - ٢٧٠$	$\theta + ٢٧٠$

تغير حرف بحت والإشارة

بدون الحاسبة أوجد

$$\text{جا}١٥٠ = \text{ا}٣٠ = \frac{١}{٢}$$

$$\text{قا}٢١٠ = -\text{قا}٣٠ = -\frac{٢}{\sqrt{٣}}$$

$$\text{ظتا}٧٨٠ = \text{ظتا}٦٠ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$\text{جتا}(-٩٠٠) = \text{ا}(-٩٠ + ٣٦٠ \times ٣)$$

$$= \text{ا}١٨٠ = -١$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بدوم كاسيه أوجد ميه

ص = ١٥ جتا (-٣٠٠) + جتا ٩٣٠ ظتا ٢٤٠

الحل

ص = ١٥ جتا ٦٠ + جتا ٢١٠ ظتا ٢٤٠

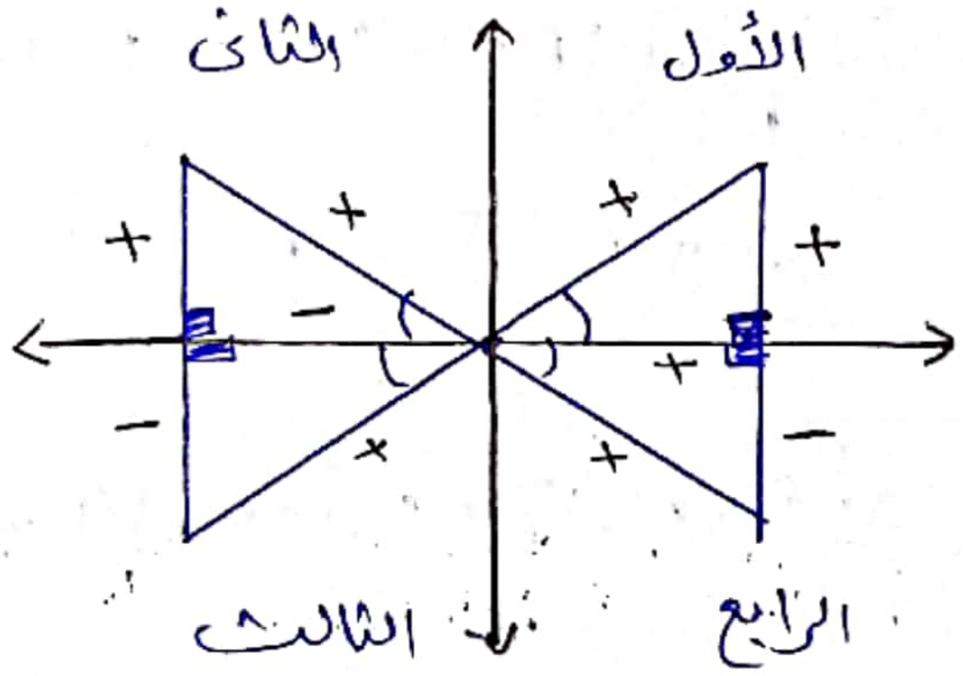
= ٣٠ جتا ٦٠ + (- جتا ٣٠ ظتا ٦٠)

= $\frac{١}{٣\sqrt{}} \times \frac{٣\sqrt{}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$

ملاحظة هامة

يمكن إيجاد ميل الدوال المثلثية مباشرة عندما يكون θ في الوضع القياسي كالآتي



مثال

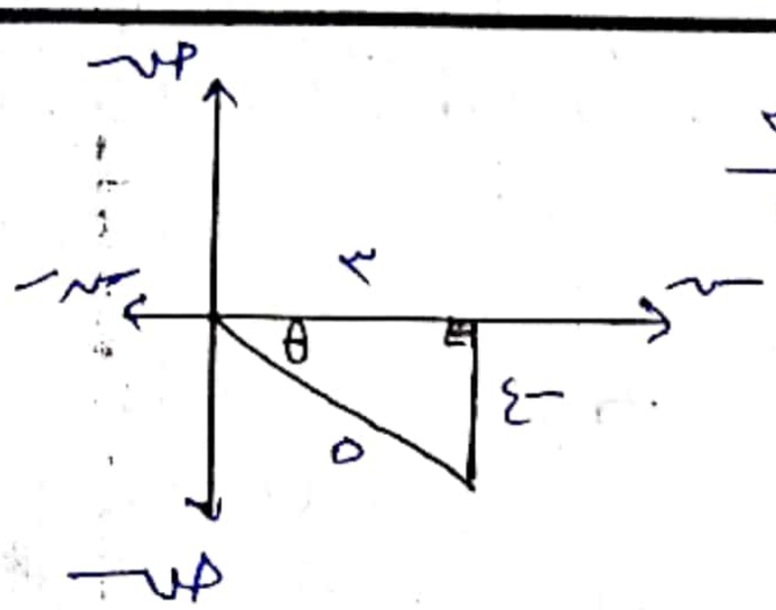
إذا كانت جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، θ ∈]٢٧٠ ، ٣٦٠[

فأوجد قيمة المقدار :-

ص = ظا (١٨٠ - θ) + ظا (٩٠ - θ) - ظا (٢٧٠ - θ)

الحل

θ تقع في الربع الرابع



جا θ = $\frac{٣}{٥}$

جا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

المقدار

= ص جا θ + ظتا θ - ظتا θ

= ص جا θ = $\frac{-٤}{٥}$

لأي زاويتين α ، β حادتين موجبتين

إذا كان

α + β = ٩٠°

- جا α = جتا β
- ظا α = ظتا β
- قا α = قتا β

الحل

① جا ٤٢ = $\frac{\text{جتا ٤٨}}{\text{صفر}}$

② $\frac{\text{ظا ٥٠}}{\text{ظا ٤٠}} = \frac{}{}$

③ قا ٦٨ - قتا ٢٢ = $\frac{}{\text{صفر}}$

④ جا α = جتا β فإن

ظا (α + β) = ظا ٩٠ = غير معرف

أوجد القيم الممكنة لـ θ حيث $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ التي تحقق

① $\sin\theta = \cos 2\theta$

الحل

$\theta + 2\theta = 90 \Leftarrow 2\theta = 90 - \theta$

$\theta = \frac{90}{3} = 30^\circ$

---

② $\tan(\theta + 25) = \cot(\theta + 15)$

الحل

$\theta + 25 + \theta + 15 = 90$

$2\theta + 40 = 90 \quad 2\theta = 50$

$\theta = \frac{50}{2} = 25^\circ$

---

③ $\sin(\frac{\theta+20}{2}) = \cos(\frac{\theta+40}{2})$

الحل

$\frac{\theta+20}{2} + \frac{\theta+40}{2} = 90$

$\frac{2\theta+60}{2} = 90$

$2\theta + 60 = 180$

$2\theta = 120$

$\theta = 60^\circ$

أوجد الحل العام للمعادلات المثلثية

① $\sin\alpha = \cos\beta$

$\alpha \pm \beta = 360n + 90$

أو $\alpha \pm \beta = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$

---

② $\tan\alpha = \cot\beta$

$\alpha \pm \beta = 360n + 90$

أو $\alpha \pm \beta = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$

---

③ $\sec\alpha = \csc\beta$

$\alpha + \beta = 360n + 180$

أو $\alpha + \beta = 2\pi n + \pi$

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية

① $\sin 2\theta = \cos\theta$

الحل

$2\theta + \theta = 360n + 90$	$2\theta - \theta = 360n + 90$
$3\theta = 360n + 90$	$\theta = 360n + 90$
$\theta = 120n + 30$	

كن مجد
https://enmujed.com

② $\text{قا}(\theta - 30^\circ) = \text{قتا}(3\theta + 20^\circ)$

ثم أوجد قيم $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$

الحل

بوضع $\text{قتا}(3\theta + 20^\circ) = \text{قا}(\theta - 30^\circ)$

إما

$3\theta + 20^\circ + \theta - 30^\circ = 360^\circ n + 90^\circ$

$4\theta - 10^\circ = 360^\circ n + 90^\circ$

$4\theta = 360^\circ n + 100^\circ$

$\theta = 90^\circ n + 25^\circ$

أو

$3\theta + 20^\circ - \theta + 30^\circ = 360^\circ n + 90^\circ$

$2\theta + 50^\circ = 360^\circ n + 90^\circ$

$2\theta = 360^\circ n + 40^\circ$

$\theta = 180^\circ n + 20^\circ$

بوضع $n = 0$ $\theta = 25^\circ$ أو 20°

بوضع $n = 1$ $\theta = 115^\circ$ أو 200° مرفوضة مرفوضة

$\therefore$ قيم $\theta = \{20^\circ, 25^\circ\}$

③ $\text{ظا}\theta = \text{ظتا}2\theta$

ثم أوجد قيم θ حيث $\theta \in [0, \pi]$ أي $[0^\circ, 180^\circ]$

الحل

$2\theta + \theta = 90^\circ n + 90^\circ$

$3\theta = 180^\circ n + 90^\circ$

$\theta = 60^\circ n + 30^\circ$

بوضع $n = 0$ $\theta = 30^\circ$ تحقق

بوضع $n = 1$ $\theta = 90^\circ$ تحقق

بوضع $n = 2$ $\theta = 150^\circ$ تحقق

بوضع $n = 3$ $\theta = 210^\circ$ مرفوضة

$\therefore$ قيم θ التي تحقق هي

$\{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ\}$

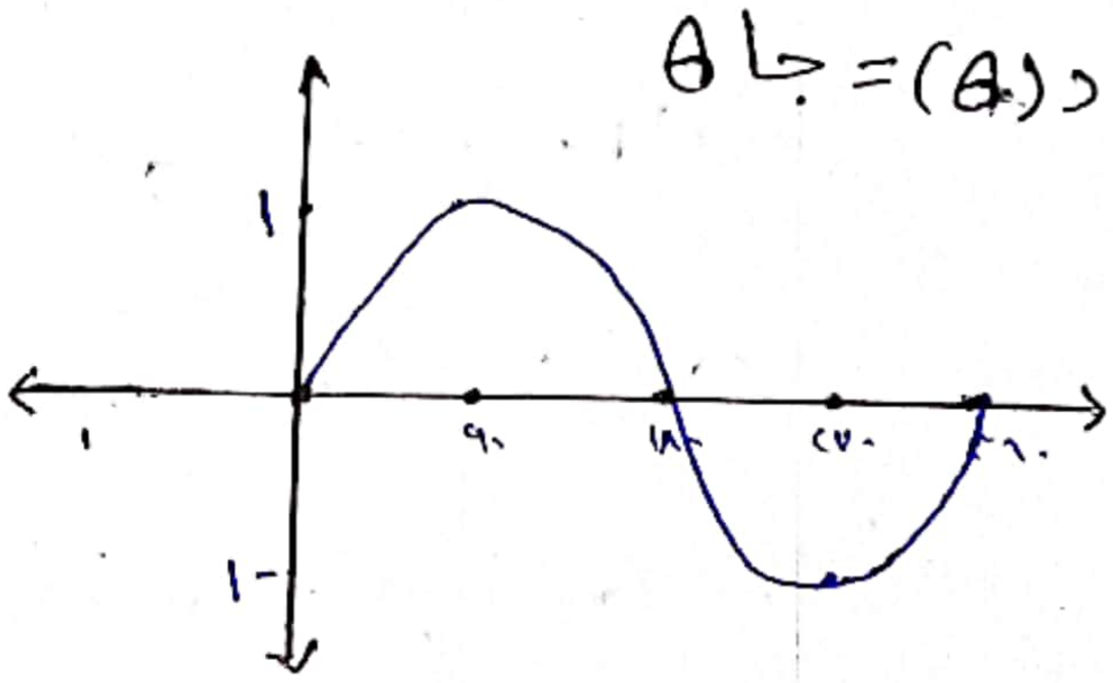
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كن مجد
https://enmujed.com

الدرس الخاص
التمثيل البياني للدوال المثلثية

دالة الجيب

د(θ) = جا θ



مجال = ح

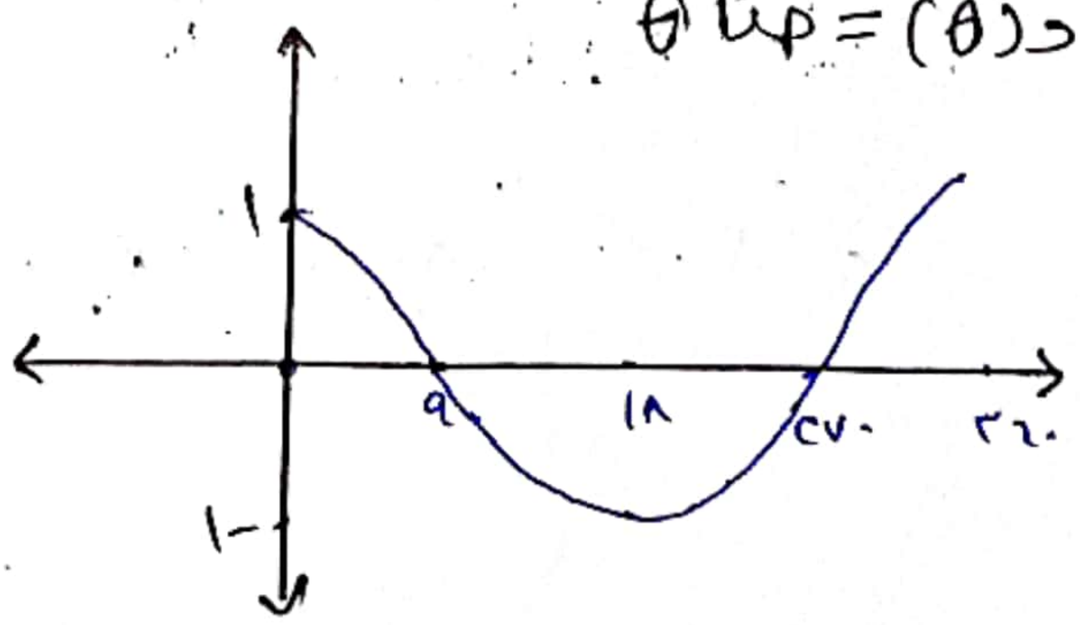
مدى = [-١ ، ١]

قيمة عظمى = ١ قيمة صغرى = -١

دورة = ٣٦٠

دالة جيب التمام

د(θ) = جتا θ



مجال = ح

المدى = [-١ ، ١]

قيمة عظمى = ١

قيمة صغرى = -١

دورة = ٣٦٠

ملاحظات هامة

حل س الراسين

د(θ) = ا جا θ ، د(θ) = ا جتا θ

① مداها [-ا ، ا]

عظمى ← ا ، صغرى ← -ا

② دورة = $\frac{٣٦٠}{|ا|}$

③ عند جا يرتبط الأصل و
عند جتا لا يرتبط الأصل و

أكمل ما يلي

① مدى الدالة د(θ) = ٥ جا θ .

[-٥ ، ٥]

② مدى الدالة د(س) = ٣ جتا س

[-٣ ، ٣]

③ القيمة العظمى للدالة د(ع) = ٤ جا ع

= ٤

④ د(θ) = ٢ جا ٤ θ

المدى = [-٢ ، ٢]

دورة = $\frac{٣٦٠}{|٤|}$

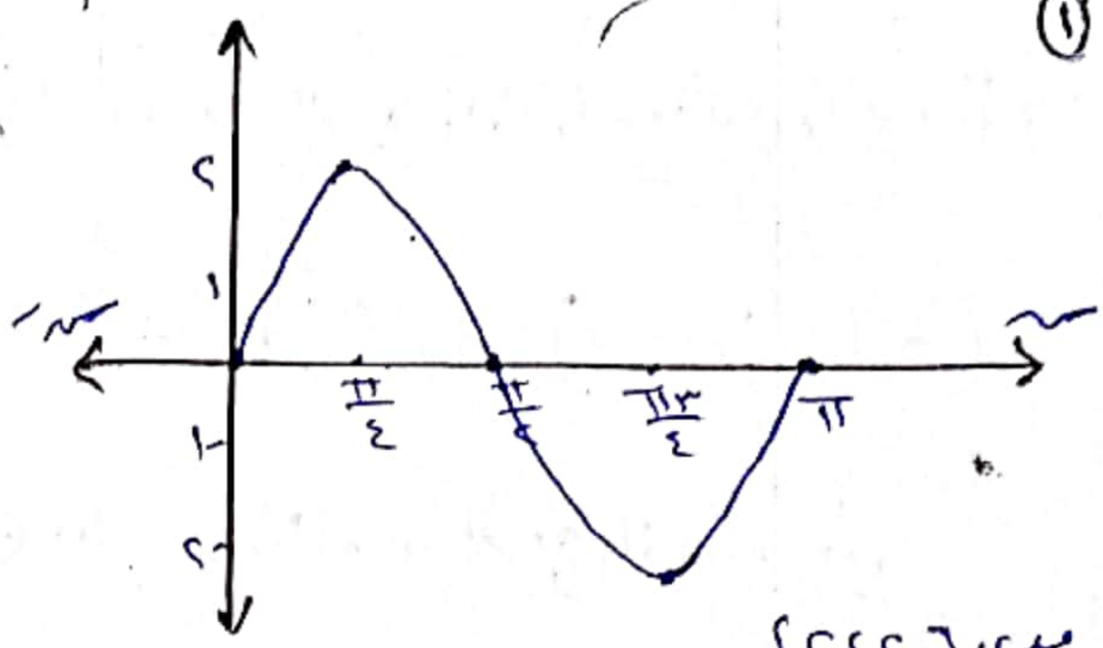
= $\frac{٩٠}{٤}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من الشكل المقابل

محنى دالة مثلثية دورية أكتب قاعدة الدالة

①



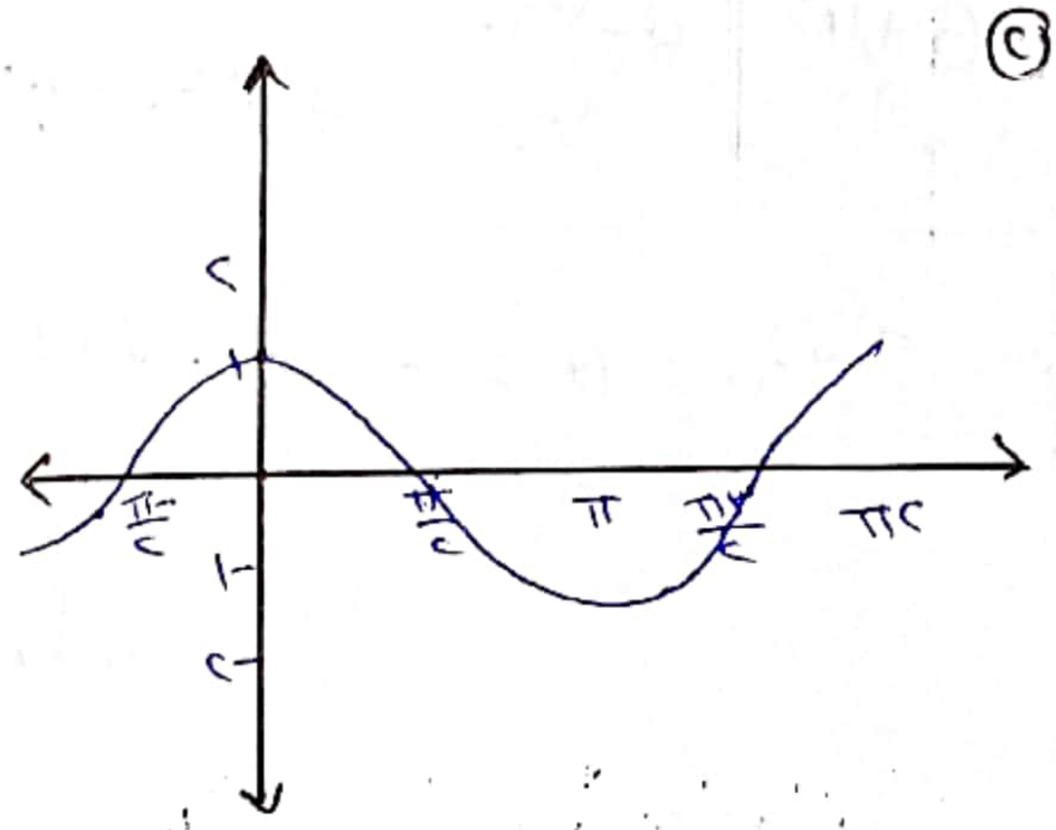
مدى [-١، ١]

دور $= \pi = \frac{2\pi}{|ب|} \Leftarrow ب = 2$

$ق(\theta) = 2 جا 2\theta$

---

③



$د(\theta) = جتا \theta$

مدى الدالة $[-1، 1]$

دورية $= 2\pi = \frac{2\pi}{|ب|} \quad ب = 1$

إذا كانت $م_1 = \frac{ق - جا\theta}{3}$

فإن $م \in$ ----

الكل

$\therefore جا\theta \in [-1، 1]$

$\therefore -1 \leq جا\theta \leq 1$ (-١)

$-1 < -جا\theta < 1$ (+٢)

$1 > 2 - جا\theta > 1$ (÷٣)

$\frac{1}{3} > \frac{2 - جا\theta}{3} > 1$

$\frac{1}{3} < م < 1$

$\frac{1}{3} \leq م \leq 1$

$م \in [\frac{1}{3}، 1]$

إذا كانت $د(س) = ا جتا بس$ حيث ا، ب ثوابت

والدورية ودورتها $\frac{\pi}{2}$ ومداها $[-1، 1]$

فإن $\frac{ا}{ب} =$ ----

مداها $[-1، 1] \quad ا = 1$

دورتها $= \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{ب} \Leftarrow ب = 4$

$\therefore \frac{ا}{ب} = \frac{1}{4}$

الدرس السادس
إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدى نسب المثلثية

اذا كانت $\theta = \text{جا}^{-1} \text{ص} \Leftarrow \text{ص} = \text{جا}\theta$

حيث جا^{-1} الدالة العكسية للدالة ص

وتكتب بالآلة الحاسبة

shift + sin = $\sin^{-1}$( )

أولاً اذا كانت θ زاوية حادة موجبة

أى $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

أوجد قيمة θ اذا كانت $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

① $\text{جا}\theta = \frac{1}{2}$

الحل

$\theta = \text{جا}^{-1}\frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

② $\text{ظا}\theta = \sqrt{3}$

الحل

$\theta = \text{ظا}^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

③ $\text{جتا}\theta = 0.7865$

$\theta = \text{جتا}^{-1}(0.7865) \simeq 38^\circ 18' 25''$

نستخدم الآلة الحاسبة

اذا كانت $\theta \in]0, 2\pi[$

فنتبع الخطوات الآتية

① تحديد الربع الذى تقع فيه θ بسهولة

② نوجد θ الحادة. (بدون إشارة)

③ نتسب الزاوية للربع الذى تقع فيه

الأول = θ كما هى

الثانى = $180^\circ - \theta$

الثالث = $180^\circ + \theta$

الرابع = $360^\circ - \theta$

جا	كل
$180^\circ - \theta$	θ
$180^\circ + \theta$	$360^\circ - \theta$
ظا	جتا

اذا كانت $\theta \in]0, 360^\circ[$

فأوجد θ التى تحقق

$\text{جا}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

$\because$ جاθ موجبة $\therefore$ تقع فى الربع الأول والثانى

θ الحادة $= 60^\circ$

$\because$ الربع الأول $= 60^\circ$

$\because$ الثانى $= 180 - 60 = 120^\circ$

$\therefore \theta \in \{60^\circ, 120^\circ\}$

كن مجد
https://enmujed.com

المادة : حساب مثلثات ... الدرس : ... حساب المثلثات معلومة واحدة

① $\text{جتا}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل

جتا سالبة في الثاني أو الثالث

θ الحادة $= 45^\circ$ (بدون الإشارة)

الثاني $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

الثالث $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

$\therefore \theta = 135^\circ$ أو 225°

---

② $\text{ظا}\theta = -\sqrt{3}$

الحل

ظا سالبة تقع في الثاني أو الرابع

θ الحادة $= 60^\circ$

الثاني $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

الرابع $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$\therefore \theta = 120^\circ$ أو 300°

---

③ $\text{جتا}\theta = -0.625$

الحل

جتا سالبة θ في الثاني أو الثالث

θ الحادة $= 51^\circ\ 31'\ 3'' \simeq 51^\circ$

الثاني $= 180^\circ - 51^\circ\ 31'\ 3'' = 128^\circ\ 28'\ 57''$

الثالث $= 180^\circ + 51^\circ\ 31'\ 3'' = 231^\circ\ 31'\ 3''$

إذا قطع الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في ب $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ فأوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل

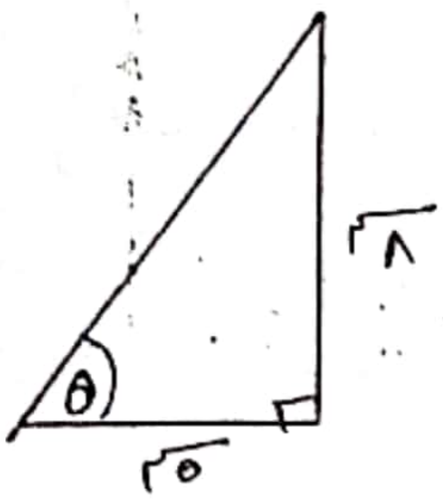
تقع في الربع الثاني (- ، +)

جتا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftarrow$ θ الحادة $= 45^\circ$

الربع الثاني $= 180 - 45 = 135^\circ$

$\therefore \theta = 135^\circ$

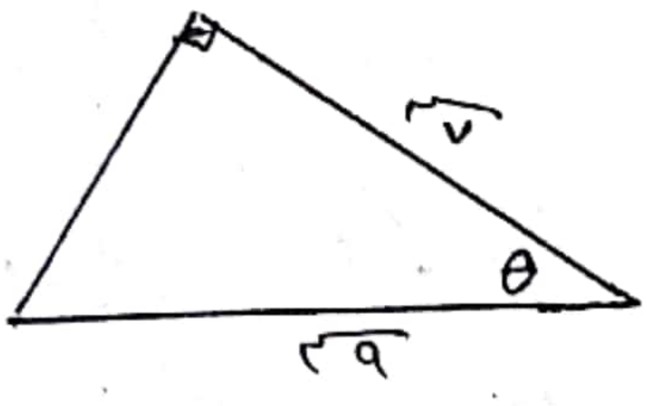
من الأشكال الآتية أوجد قياس θ بالتقدير



$\text{ظا}\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{8}{5}$

θ حادة

$\therefore \theta = 57^\circ\ 59'\ 40''$



$\text{جتا}\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{7}{9}$

θ حادة

$\therefore \theta = 38^\circ\ 56'\ 22''$

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

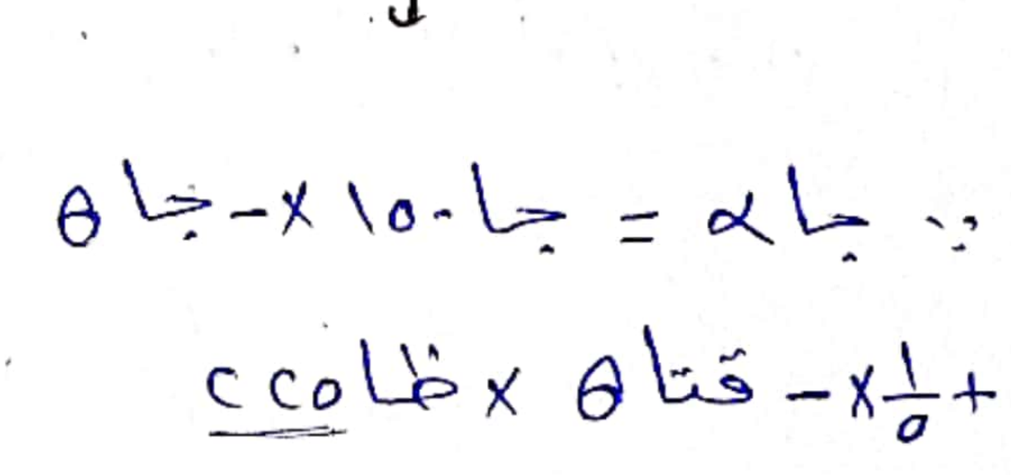
كن مجد
https://eanmjad.com

اذا كانت $ظا\theta = \frac{٤}{٣}$ حيث
θ اكبر زاوية موجبة $\theta \in]٢٧٠, ٣٦٠[$
فاوجد قيمة α لاقرب دقيقة اذا كان

$جا\alpha = ٠.٨ جا(\theta - ١٨٠) + \frac{١}{٥} قتا\theta$
$ظا(\theta + ١٨٠) ظتا\theta = ٢$

الحل

$ظا\theta$ موجبة تقع الاول او الثالث
اكبر زاوية موجبة $\therefore \theta$ في الربع الثالث



$\therefore جا\alpha = جا١٨٠ \times - جا\theta$
$+ \frac{١}{٥} \times - قتا\theta \times ظتا\theta \times ٢$

$\therefore جا\alpha = ٠.٨ \times - جا\theta - \frac{١}{٥} قتا\theta \times ظا\theta \times ٢$

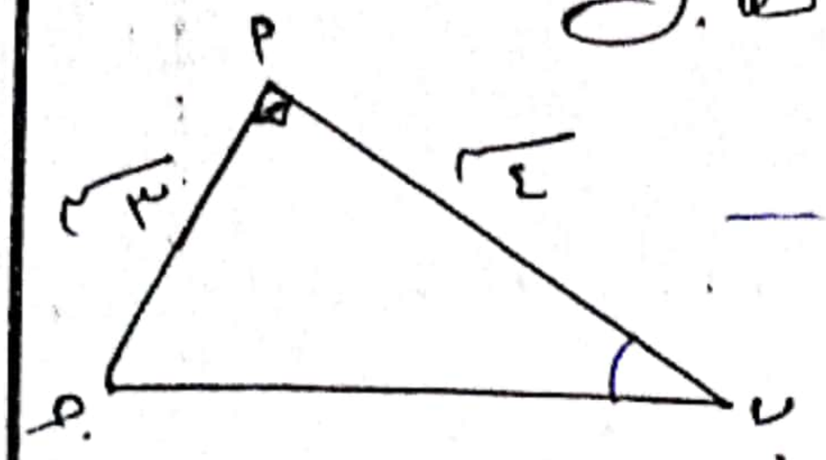
$\alpha = ١٨٠ - ٤٠° ٣٢' = ١٣٩° ٢٨'$

α بالدرجة $= ٤٠° ٣٢'$ الاول

$\frac{١٣}{٢٠} = \frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥} = \alpha$ جا

$\alpha = ١٠ \times \frac{٥-}{٤} \times \frac{١}{٥} - \frac{٤-}{٥} - \times \frac{١}{٢} = \alpha$ طا

من الشكل المقابل

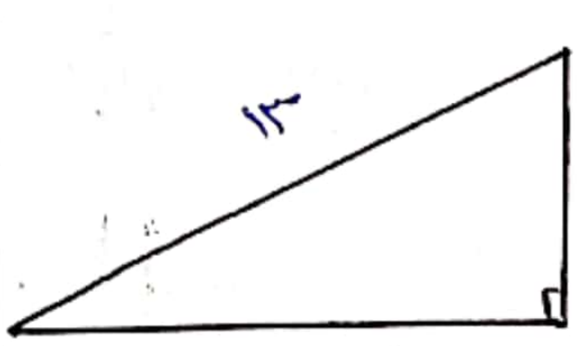


$ظا(\hat{ب}) = \frac{٣}{٤}$ ، $ظا(\hat{ب}) =$ ـــ

$جا(ظتا^{-١} \frac{٣}{٤}) =$ ـــــ

$ظتا^{-١} \frac{٣}{٤} = ٣٠° ، جا ٣٠° = \frac{١}{٢}$

من الشكل المقابل



$جا(ظا^{-١} \frac{٥}{١٢}) =$ ق(ح ب)

$جا\theta = \frac{٥}{١٣}$

$ظا^{-١} \frac{٥}{١٢} + ظتا^{-١} \frac{٣}{٤} = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠°$

$ظتا^{-١} س + جا^{-١} س = \frac{\pi}{٢}$

تم بحمد الله
م/ محمد عبد المجيد الليثي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner